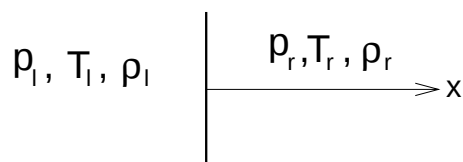


RAFAL-AKN 解析例 (1)

衝撃波管問題の解析

● 計算内容

図1に示すように隔壁の左側を高圧、右側を低圧とする衝撃波管問題において時刻 $t = 0$ に隔壁を除去した後の流れを、隔壁左右の圧力比を保ったままで圧力レベルを変化させて解析する。

図.1 衝撃波管問題 ($p_l > p_r$)

p_l, p_r はそれぞれ隔壁左右の圧力、 T_l, T_r はそれぞれ隔壁左右の温度、 ρ_l, ρ_r はそれぞれ隔壁左右の密度である。これらの量は理想気体の状態方程式 $p_l = \rho_l R T_l, p_r = \rho_r R T_r$ により結び付けられる。ここで、 R は単位質量当り気体定数である。

隔壁位置を原点として隔壁に垂直に x 軸を設定を設定した1次元問題として解析する。

● 計算条件

圧力

圧力比 $p_l/p_r = 10$ として以下の圧力レベルで解析する。

高圧側 (左側) 圧力 p_l	低圧側 (右側) 圧力 p_r	高圧側 (左側) 平均自由行程	高圧側 (左側) 圧力 p_l	低圧側 (右側) 圧力 p_r	高圧側 (左側) 平均自由行程
10^6 Pa	10^5 Pa	$7.1 \times 10^{-9} \text{ m}$	1 Pa	10^{-1} Pa	$7.1 \times 10^{-3} \text{ m}$
10^5 Pa	10^4 Pa	$7.1 \times 10^{-8} \text{ m}$	10^{-1} Pa	10^{-2} Pa	$7.1 \times 10^{-2} \text{ m}$
10^4 Pa	10^3 Pa	$7.1 \times 10^{-7} \text{ m}$	10^{-2} Pa	10^{-3} Pa	$7.1 \times 10^{-1} \text{ m}$
10^3 Pa	10^2 Pa	$7.1 \times 10^{-6} \text{ m}$	10^{-3} Pa	10^{-4} Pa	7.1 m
10^2 Pa	10 Pa	$7.1 \times 10^{-5} \text{ m}$	10^{-4} Pa	10^{-5} Pa	$7.1 \times 10 \text{ m}$
10 Pa	1 Pa	$7.1 \times 10^{-4} \text{ m}$			

温度

$$T_l = T_r = 300\text{K}$$

気体種

アルゴン

気体物性値

$$\text{単位質量当り気体定数} = 208.13237(\text{J}/(\text{kgK}))$$

$$\text{比熱比} = 5/3$$

$$\text{全衝突断面積} = 4.1455 \times 10^{-19}(\text{m}^2)$$

解析領域

隔壁左側 1.5m から隔壁右側 1.5m ($-1.5\text{m} \leq x \leq 1.5\text{m}$) の領域

解析領域分割数

1000 等分割

速度空間

$$-3000 \sim 3000\text{m/s}$$

速度空間分割数

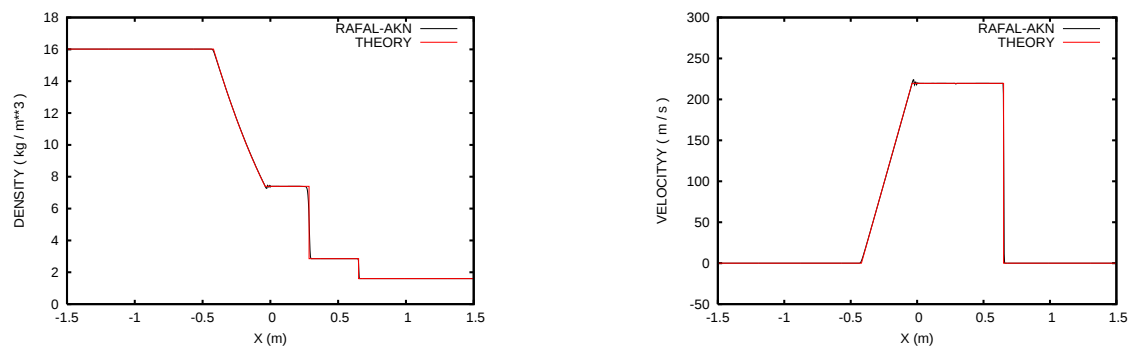
199 等分割

● 結果

隔壁除去後 $1.3 \times 10^{-3}\text{s}$ 経過時点での密度、速度、温度、圧力の分布を図 2~12 に示す。

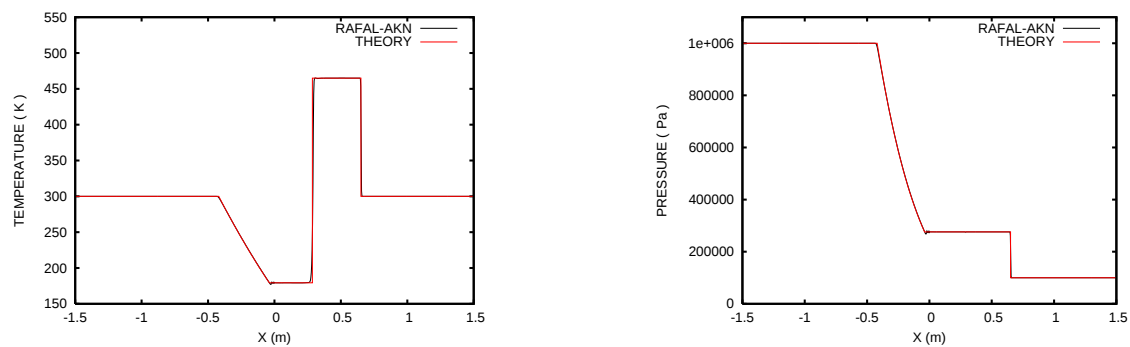
図 2~8(高圧側圧力 = $10^6 \sim 1\text{Pa}$) では連続流に対する理論解との比較を、図 9(高圧側圧力 = 0.1Pa) では連続流に対する理論解と自由分子流に対する理論解との比較を、図 10~12(高圧側圧力 = $10^{-2} \sim 10^{-4}\text{Pa}$) では自由分子流に対する理論解との比較を示す。

(自由分子流に対する衝撃波管問題の理論解は、添付の「自由分子流領域における衝撃波管問題」参照)



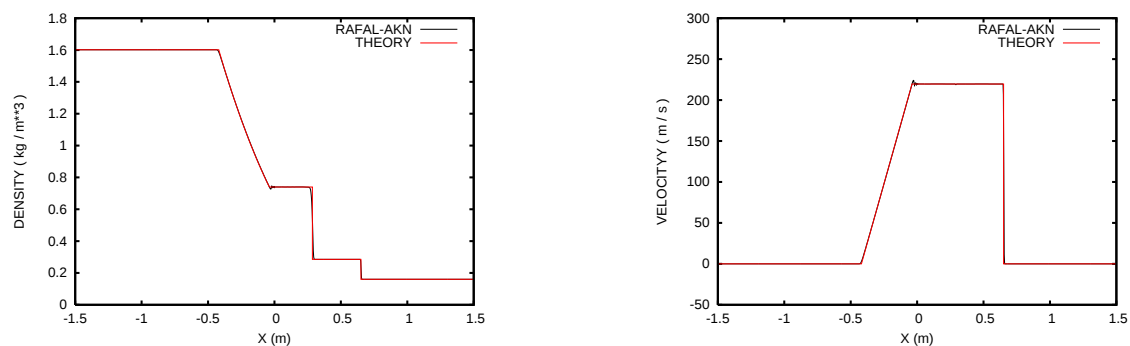
密度

流速



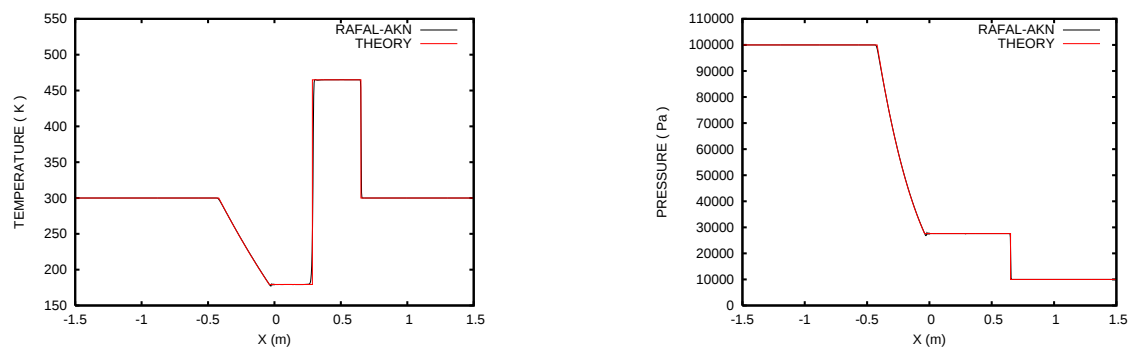
温度

圧力

図2 高圧側圧力 $p_l = 10^6 \text{ Pa}$ 

密度

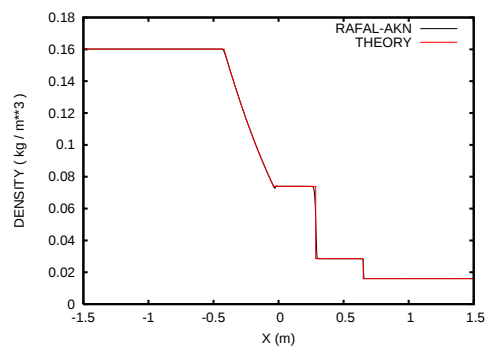
流速



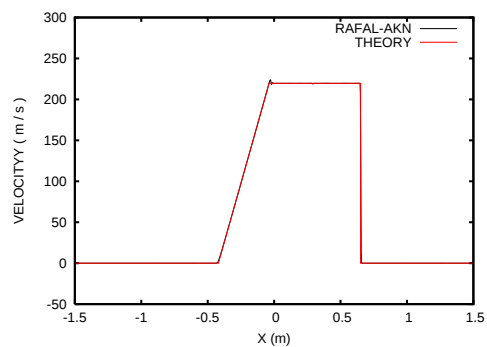
温度

圧力

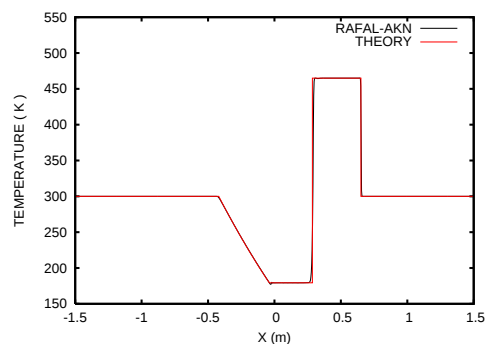
図3 高圧側圧力 $p_l = 10^5 \text{ Pa}$



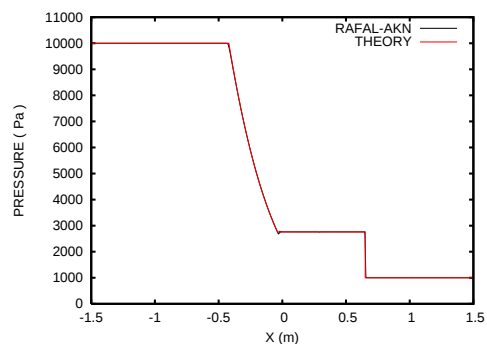
密度



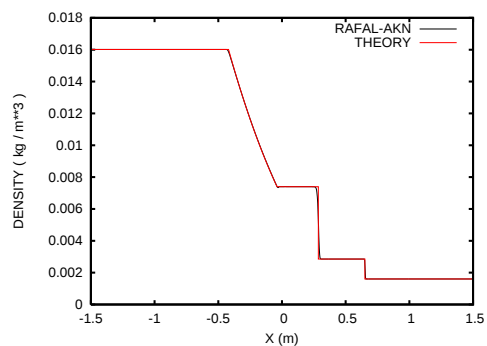
流速



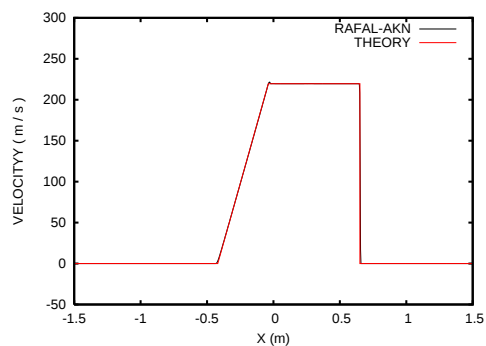
温度



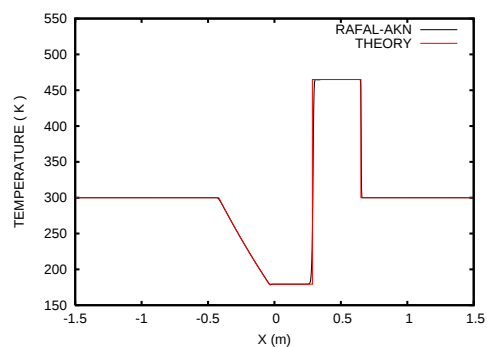
圧力

図4 高圧側圧力 $p_l = 10^4 \text{ Pa}$ 

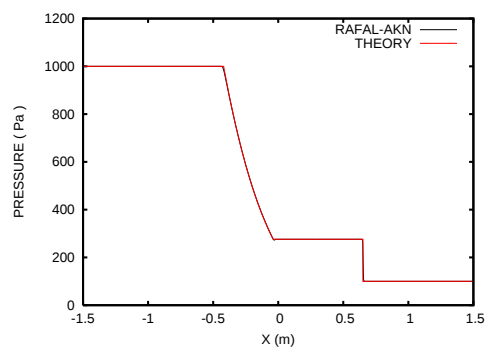
密度



流速

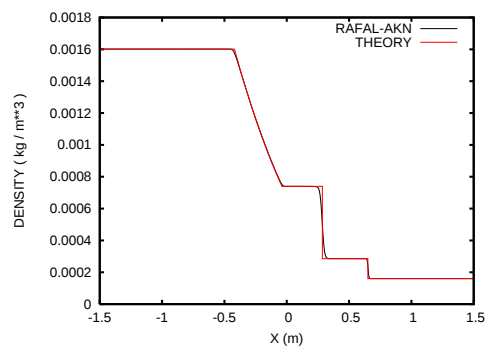


温度

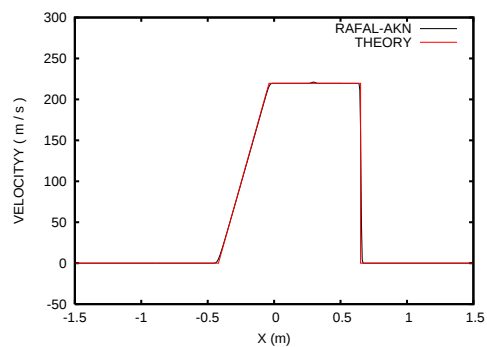


圧力

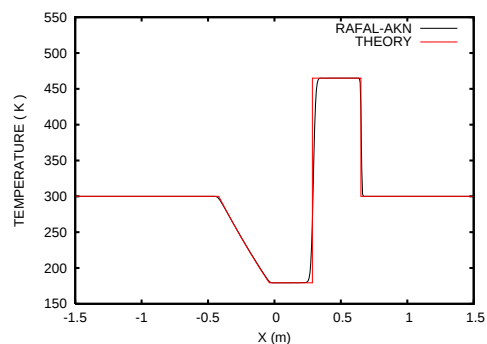
図5 高圧側圧力 $p_l = 10^3 \text{ Pa}$



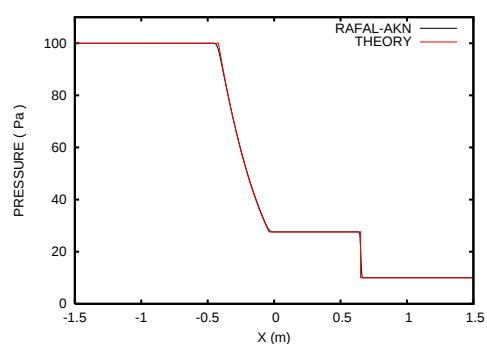
密度



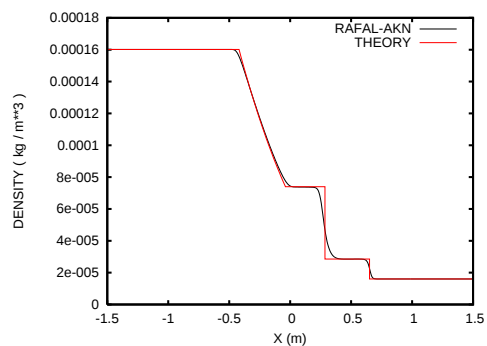
流速



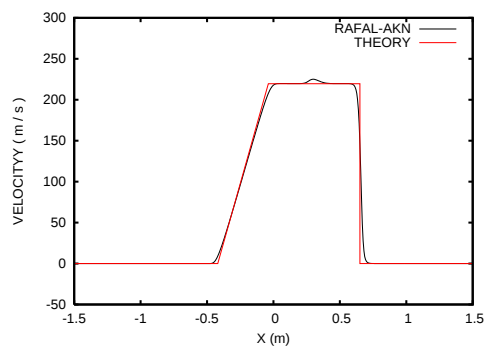
温度



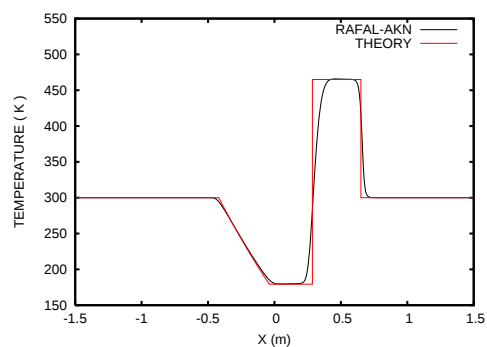
圧力

図6 高圧側圧力 $p_l = 10^2 \text{Pa}$ 

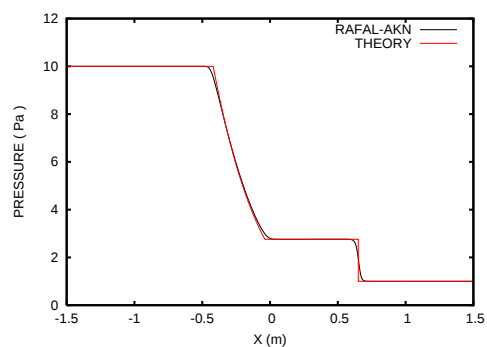
密度



流速

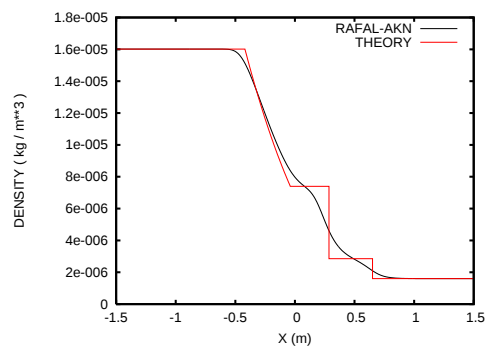


温度

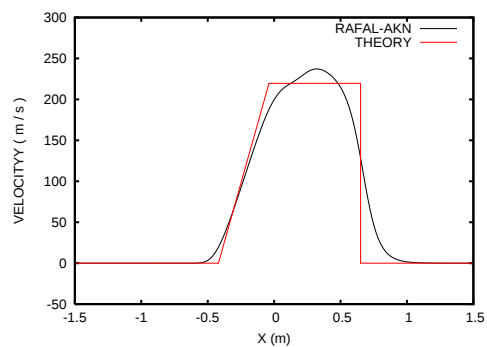


圧力

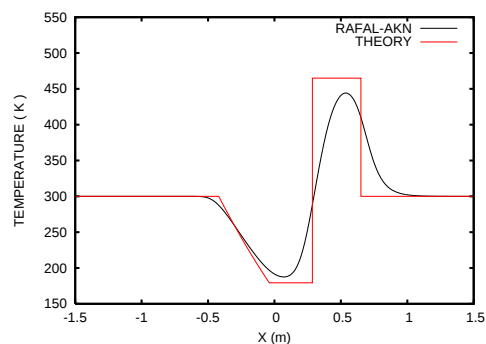
図7 高圧側圧力 $p_l = 10 \text{Pa}$



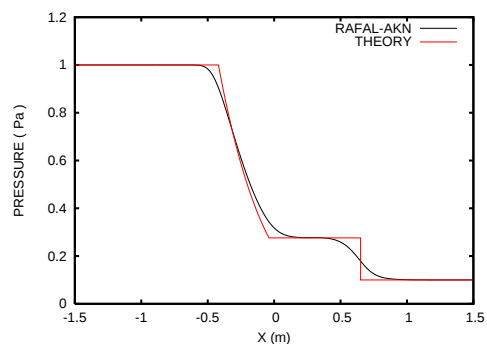
密度



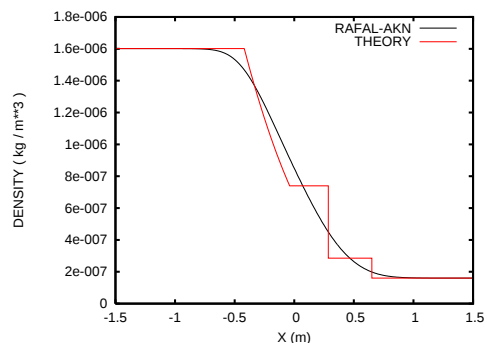
流速



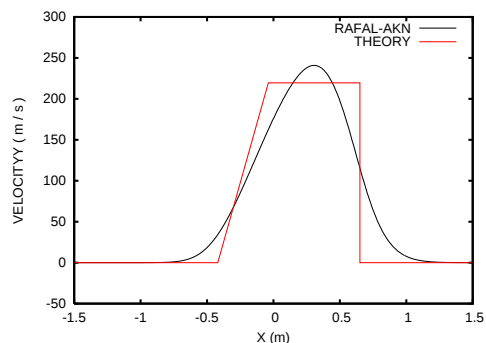
温度



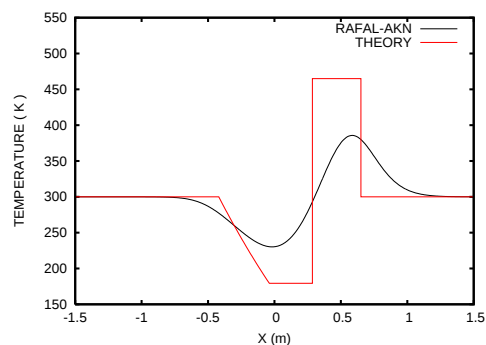
圧力

図8 高圧側圧力 $p_l = 1$ Pa

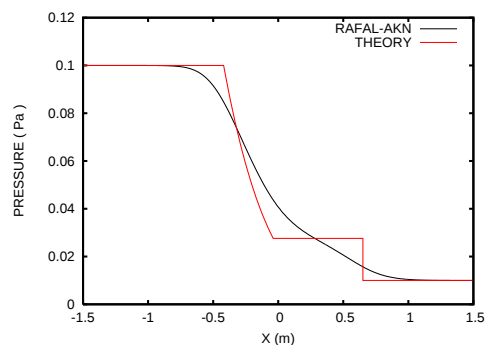
密度



流速

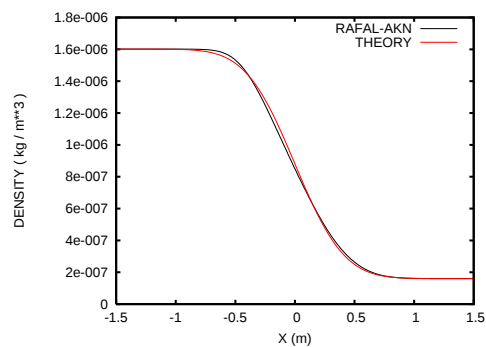


温度

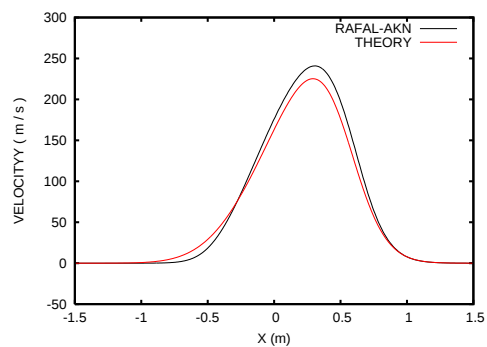


圧力

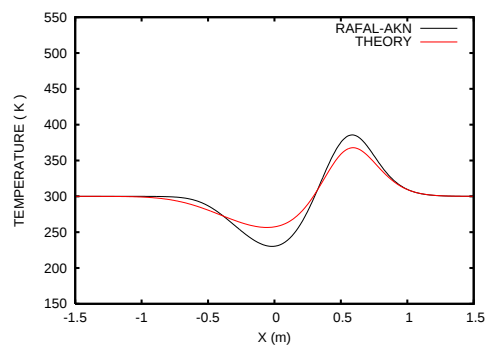
図9-1 高圧側圧力 $p_l = 10^{-1}$ Pa(連続流の理論解と比較)



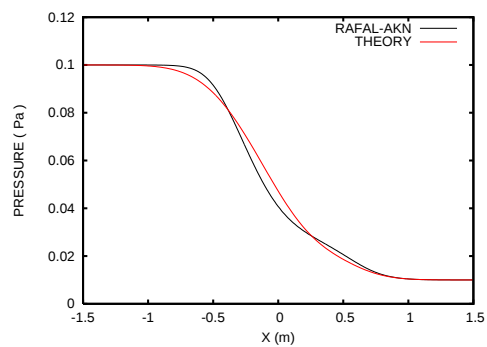
密度



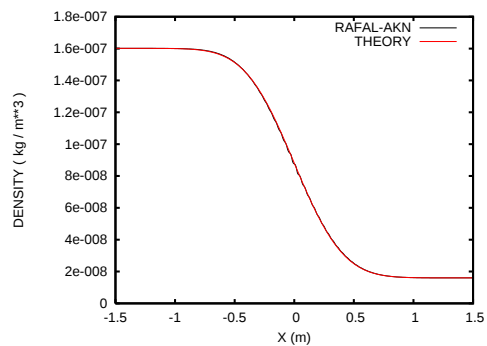
流速



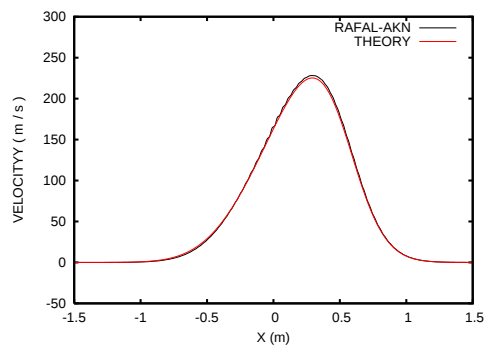
温度



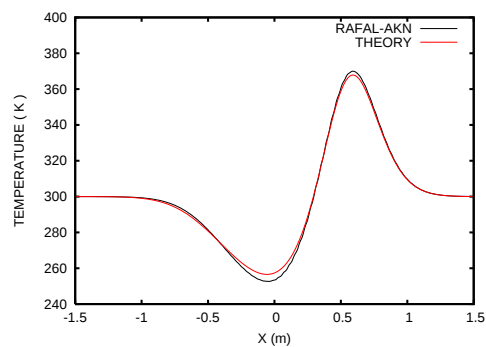
圧力

図 9-2 高圧側圧力 $p_l = 10^{-1}$ Pa (自由分子流の理論解と比較)

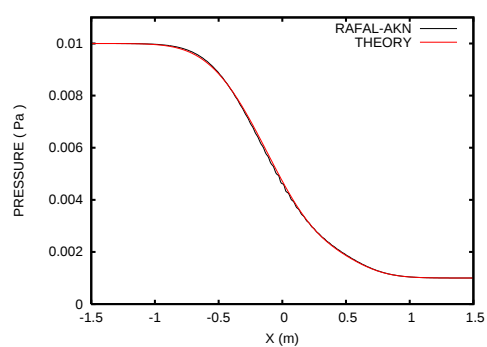
密度



流速

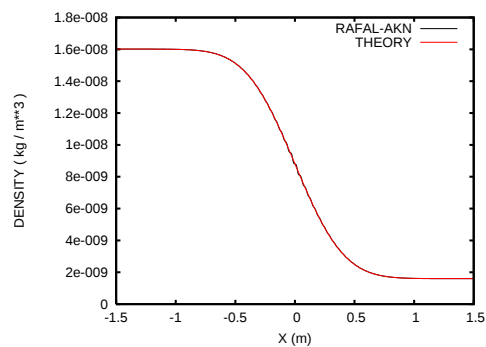


温度

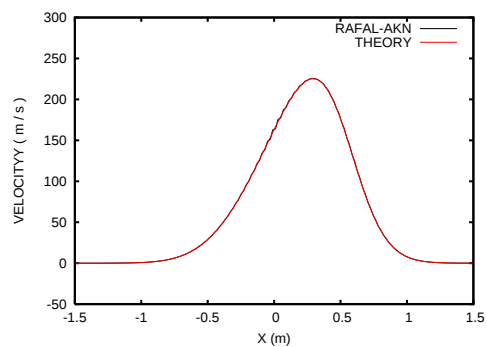


圧力

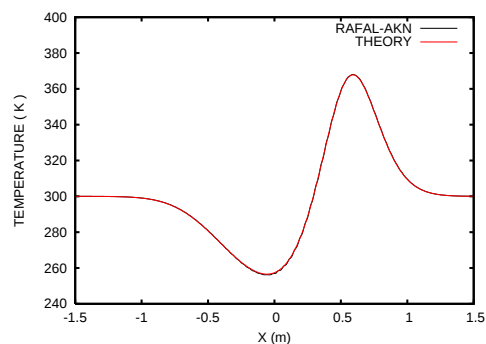
図 10 高圧側圧力 $p_l = 10^{-2}$ Pa



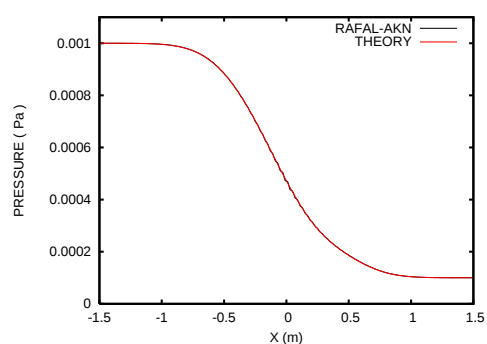
密度



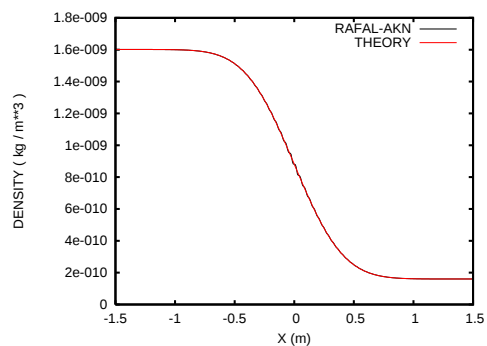
流速



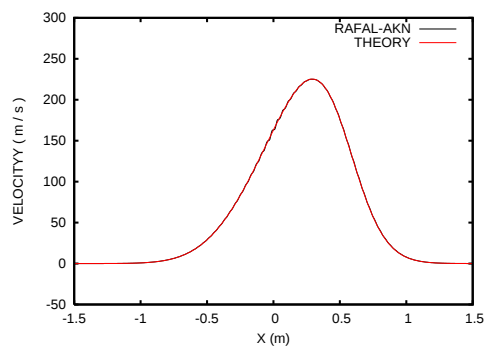
温度



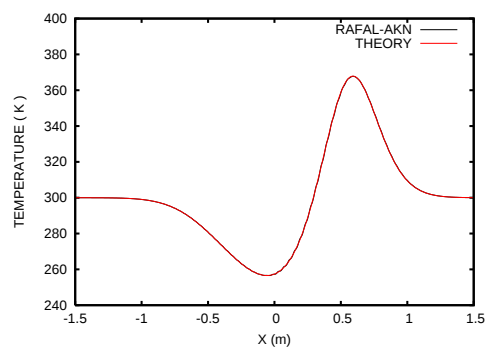
圧力

図 11 高圧側圧力 $p_l = 10^{-3}$ Pa

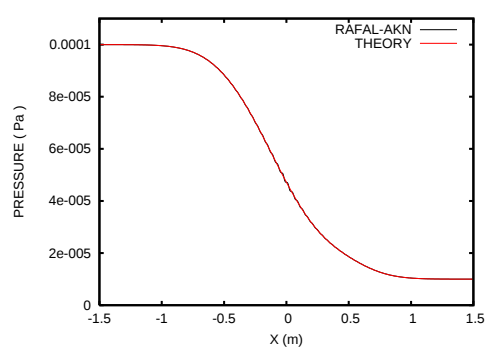
密度



流速



温度



圧力

図 12 高圧側圧力 $p_l = 10^{-4}$ Pa

- 検討

- ・ 高圧側圧力が $10^6 \sim 10^3 \text{Pa}$ までは (図 2~5 までは) 計算結果と連続流に対する理論解とは、ほぼ一致している。計算結果は膨張波の始まり部分に振動が見られるが、密度の接触不連続や衝撃波面の不連続は振動無しで捉えられている。

- ・ 高圧側圧力が $100 \text{Pa}, 10 \text{Pa}$ (図 6,7) では、流速分布に「こぶ」が現れ、不連続部分で連続流に対する理論解との相違が目立ってくる。

- ・ 高圧側圧力が 1Pa (図 8) となると連続流に対する理論解との相違はさらに大きくなり、高圧側圧力が 0.1Pa (図 9) では計算結果は自由分子流に対する理論解に近くなっている。

- ・ 高圧側圧力が 10^{-2}Pa (図 10) となると温度分布を除いて、計算結果は自由分子流に対する理論解とほぼ一致している。

- ・ 高圧側圧力が 10^{-3}Pa 以下 (図 11,12) となると、計算結果は全て自由分子流に対する理論解と一致する。

自由分子流領域における衝撃波管問題

目 次

1. 問題設定	1
2. 基礎式と初期条件	1
2.1 基礎式	1
2.2 マクロ量	1
2.3 初期条件	2
2.4 問題の 1 次元性の考慮	2
2.5 縮退分布関数の導入	3
3. 方程式の初期値問題の解	4
4. マクロ量の計算式	5
5. 衝撃波管問題のマクロ量	7
5.1 密度	7
5.2 マクロ流速	8
5.3 温度	9
付録 A. 縮退分布関数の初期条件	12
付録 B. 積分公式 (1)	14
付録 C. 積分公式 (2)	18

1. 問題設定

図1に示すように隔壁の左側を高圧、右側を低圧とする衝撃波管問題において、隔壁左右の圧力レベルが十分低く自由分子流条件が成立しているとする。時刻 $t = 0$ に隔壁を除去した後の流れを文献 [1] を参考にして求める。

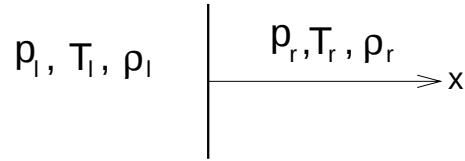


図.1 衝撃波管問題 ($p_l > p_r$)

p_l, p_r はそれぞれ隔壁左右の圧力、 T_l, T_r はそれぞれ隔壁左右の温度、 ρ_l, ρ_r はそれぞれ隔壁左右の密度である。これらの量は理想気体の状態方程式 $p_l = \rho_l R T_l, p_r = \rho_r R T_r$ により結び付けられる。ここで、 R は単位質量当り気体定数である。

隔壁に垂直に x 軸を設定し、隔壁面内に y, z 軸を設定する。

2. 基礎式と初期条件

2.1 基礎式

自由分子流は、ボルツマン方程式右辺の衝突項を無視した

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial f}{\partial t} + c_x \frac{\partial f}{\partial x} + c_y \frac{\partial f}{\partial y} + c_z \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

により記述される。ここで $f(\mathbf{c}, \mathbf{r}, t)$ は気体分子の速度分布関数、 t は時間、 $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ は気体分子の速度ベクトル、 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ は空間デカルト座標である。

2.2 マクロ量

密度 $\rho(\mathbf{r}, t)$ は

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{c}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{c} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{c}, \mathbf{r}, t) dc_x dc_y dc_z \quad (2)$$

マクロ流速 $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ は

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathbf{c}} = \frac{1}{\rho(\mathbf{r}, t)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{c} f(\mathbf{c}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{c} = \frac{1}{\rho(\mathbf{r}, t)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{c} f(\mathbf{c}, \mathbf{r}, t) dc_x dc_y dc_z \quad (3)$$

温度 $T(\mathbf{r}, t)$ は

$$\begin{aligned} T(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{3R} \overline{C^2} = \frac{1}{3R\rho(\mathbf{r}, t)} \int_{-\infty}^{\infty} C^2 f(\mathbf{c}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{c} \\ &= \frac{1}{3R\rho(\mathbf{r}, t)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathbf{c} - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\}^2 f(\mathbf{c}, \mathbf{r}, t) dc_x dc_y dc_z \end{aligned} \quad (4)$$

より、計算される。ここで、 $\mathbf{C} = \mathbf{c} - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ は peculiar velocity である。

2.3 初期条件

隔壁両側の気体が図 1 に示された温度と密度の平衡状態にあると仮定すれば、分子の速度分布はマクスウェル分布となり、速度分布関数の初期条件 $f(\mathbf{c}, \mathbf{r}, 0) = f_0(\mathbf{c}, \mathbf{r})$ は

$$\begin{aligned} f_0(\mathbf{c}, \mathbf{r}) &= \{1 - H(x)\} \frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2RT_l}\right) \\ &\quad + H(x) \frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2RT_r}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

となる。ここで、 $H(x)$ はヘビサイドの階段関数で

$$H(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

である。

2.4 問題の 1 次元性の考慮

衝撃波管問題は x 方向にのみ流れが変化する 1 次元問題なので、 y, z 方向への変化は無視され問題は簡単化される。速度分布関数 f は $(\mathbf{c}, x, t)$ の関数となり、方程式 (1) は

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_x \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

となる。

マクロ流速 $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ の y, z 成分はゼロとなり、 x 成分 $u_x(x, t)$ のみとなるので、式 (3) は

$$u_x(x, t) = \frac{1}{\rho(x, t)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_x f(\mathbf{c}, x, t) dc_x dc_y dc_z \quad (7)$$

となる。

温度 $T(x, t)$ は式 (4) より

$$T(x, t) = \frac{1}{3R\rho(x, t)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\{c_x - u_x(x, t)\}^2 + c_y^2 + c_z^2] f(\mathbf{c}, x, t) dc_x dc_y dc_z \quad (8)$$

となる。

2.5 縮退分布関数の導入

ここで、以下の縮退分布関数

$$a(c_x, x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(c_x, c_y, c_z, x, t) dc_y dc_z \quad (9)$$

と

$$b(c_x, x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (c_y^2 + c_z^2) f(c_x, c_y, c_z, x, t) dc_y dc_z \quad (10)$$

を導入する。

● 縮退分布関数の方程式

方程式 (6) 全体を c_y, c_z について $(-\infty, \infty)$ に渡って積分すれば、 a に対する方程式

$$\frac{\partial a}{\partial t} + c_x \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

が得られ、方程式 (6) 全体に $(c_y^2 + c_z^2)$ を掛けた後 c_y, c_z について $(-\infty, \infty)$ に渡って積分すれば、 b に対する方程式

$$\frac{\partial b}{\partial t} + c_x \frac{\partial b}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

が得られる。

● 縮退分布関数によるマクロ量

式 (2) より

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(c_x, c_y, c_z, x, t) dc_y dc_z \right] dc_x = \int_{-\infty}^{\infty} a(c_x, x, t) dc_x \quad (13)$$

式 (7) より

$$u_x(x, t) = \frac{1}{\rho(x, t)} \int_{-\infty}^{\infty} c_x \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(c_x, c_y, c_z, x, t) dc_y dc_z \right] dc_x = \frac{1}{\rho(x, t)} \int_{-\infty}^{\infty} c_x a(c_x, x, t) dc_x \quad (14)$$

式 (8) より

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{1}{3R\rho(x, t)} \int_{-\infty}^{\infty} \{c_x - u_x(x, t)\}^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(c_x, c_y, c_z, x, t) dc_y dc_z \right] dc_x \\ &\quad + \frac{1}{3R\rho(x, t)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (c_y^2 + c_z^2) f(c_x, c_y, c_z, x, t) dc_y dc_z \right] dc_x \\ &= \frac{1}{3R\rho(x, t)} \int_{-\infty}^{\infty} [\{c_x - u_x(x, t)\}^2 a(c_x, x, t) + b(c_x, x, t)] dc_x \end{aligned} \quad (15)$$

が得られる。

● 縮退分布関数の初期条件

$a(c_x, x, t), b(c_x, x, t)$ に対する初期条件 $a_0(c_x, x), b_0(c_x, x)$ は、式 (9), (10) により

$$a_0(c_x, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(c_x, c_y, c_z, x) dc_y dc_z \quad (16)$$

$$b_0(c_x, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (c_y^2 + c_z^2) f_0(c_x, c_y, c_z, x) dc_y dc_z \quad (17)$$

となり、式 (16), (17) に式 (5) の f_0 を代入すれば

$$a_0(c_x, x) = \{1 - H(x)\} \frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}} \exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_l}\right) + H(x) \frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}} \exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_r}\right) \quad (18)$$

$$b_0(c_x, x) = \{1 - H(x)\} \frac{2RT_l \rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}} \exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_l}\right) + H(x) \frac{2RT_r \rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}} \exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_r}\right) \quad (19)$$

となる (付録 A 参照)。

3. 方程式の初期値問題の解

以後簡単のために添字 x と引数を省略して

$$c_x \rightarrow c, \quad u_x(x, t) \rightarrow u$$

と記す。

$a(c, x, t)$ に対する方程式 (11)

$$\frac{\partial a}{\partial t} + c \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (11) \text{ 再記}$$

[この段階では c は単なるパラメータ] の初期値

$$a(c, x, 0) = a_0(c, x) \quad (20)$$

に対する解を求める。

偏微分方程式 (11) の一般解は、常微分方程式

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{c}, \quad \frac{dx}{dt} = c \quad (21)$$

の積分

$$x = ct + C_1, \quad x - ct = C_1 = \text{定数} \quad (22)$$

より、 $\phi(x)$ を任意関数として

$$a(c, x, t) = \phi(C_1) = \phi(x - ct) \quad (23)$$

と求められる [2]。

任意関数 $\phi(x)$ の具体形は初期条件から定められる。 $t = 0$ のときの式 (23) は $a(c, x, 0) = \phi(x)$ となり、これが初期条件 (20) より $a_0(c, x)$ に等しいことにより $\phi(x) = a_0(c, x)$ となる。

以上より、方程式 (11) の初期条件 (20) の解は

$$a(c, x, t) = a_0(c, x - ct) \quad (24)$$

となる。

同様に、 $b(c, x, t)$ に対する方程式 (12) の初期条件 $b(c, x, 0) = b_0(c, x)$ に対する解は

$$b(c, x, t) = b_0(c, x - ct) \quad (25)$$

となる。

4. マクロ量の計算式

式 (13),(14),(15) の縮退分布関数によるマクロ量の計算式に式 (24),(25) を代入する。

● 密度

式 (13) より

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(c, x, t) dc = \int_{-\infty}^{\infty} a_0(c, x - ct) dc \quad (26)$$

積分変数を

$$y = x - ct \quad , \quad c = \frac{x - y}{t} \quad , \quad dc = -\frac{dy}{t} \quad (27)$$

と変数変換する。

$$\rho(x, t) = \int_{\infty}^{-\infty} a_0\left(\frac{x - y}{t}, y\right) \frac{dy}{-t} = \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{\infty} a_0\left(\frac{x - y}{t}, y\right) dy \quad (28)$$

● マクロ流速

式 (14) より

$$u(x, t) = \frac{1}{\rho(x, t)} \int_{-\infty}^{\infty} ca(c, x, t) dc = \frac{1}{\rho(x, t)} \int_{-\infty}^{\infty} ca_0(c, x - ct) dc \quad (29)$$

積分変数の変数変換 (27) より

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{\rho(x, t)} \int_{-\infty}^{-\infty} \left(\frac{x-y}{t} \right) a_0 \left(\frac{x-y}{t}, y \right) \frac{dy}{-t} \\
&= \frac{1}{\rho(x, t)t^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x-y) a_0 \left(\frac{x-y}{t}, y \right) dy \\
&= \frac{x}{\rho(x, t)t} \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{\infty} a_0 \left(\frac{x-y}{t}, y \right) dy - \frac{1}{\rho(x, t)t^2} \int_{-\infty}^{\infty} y a_0 \left(\frac{x-y}{t}, y \right) dy \\
&= \frac{x}{t} - \frac{1}{\rho(x, t)t^2} \int_{-\infty}^{\infty} y a_0 \left(\frac{x-y}{t}, y \right) dy \tag{30}
\end{aligned}$$

下線部の積分に式 (28) を用いた。

● 温度

式 (15) より

$$\begin{aligned}
T(x, t) &= \frac{1}{3R\rho(x, t)} \int_{-\infty}^{\infty} [(c-u)^2 a(c, x, t) + b(c, x, t)] dc \\
&= \frac{1}{3R\rho(x, t)} \int_{-\infty}^{\infty} [(c-u)^2 a_0(c, x-ct) + b_0(c, x-ct)] dc \\
&= \frac{1}{3R\rho(x, t)} \int_{-\infty}^{\infty} (c-u)^2 a_0(c, x-ct) dc + \frac{1}{3R\rho(x, t)} \int_{-\infty}^{\infty} b_0(c, x-ct) dc \tag{31}
\end{aligned}$$

積分変数の変数変換 (27) より

$$\begin{aligned}
T(x, t) &= \frac{1}{3R\rho(x, t)t} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-y}{t} - u \right)^2 a_0 \left(\frac{x-y}{t}, y \right) dy \\
&\quad + \frac{1}{3R\rho(x, t)t} \int_{-\infty}^{\infty} b_0 \left(\frac{x-y}{t}, y \right) dy \tag{32}
\end{aligned}$$

式 (32) 右辺第 1 項の積分 I は

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-y}{t} - u \right)^2 a_0 \left(\frac{x-y}{t}, y \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x}{t} - u - \frac{y}{t} \right)^2 a_0 \left(\frac{x-y}{t}, y \right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{x}{t} - u \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{t} - u \right) \frac{y}{t} + \frac{y^2}{t^2} \right] a_0 \left(\frac{x-y}{t}, y \right) dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{x}{t} - u\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} a_0 \left(\frac{x-y}{t}, y\right) dy - 2 \left(\frac{x}{t} - u\right) \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{\infty} y a_0 \left(\frac{x-y}{t}, y\right) dy \\
&\quad + \frac{1}{t^2} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 a_0 \left(\frac{x-y}{t}, y\right) dy
\end{aligned} \tag{33}$$

式 (28) より

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_0 \left(\frac{x-y}{t}, y\right) dy = t \rho(x, t) \tag{34}$$

式 (30) より

$$\int_{-\infty}^{\infty} y a_0 \left(\frac{x-y}{t}, y\right) dy = t^2 \rho(x, t) \left(\frac{x}{t} - u\right) \tag{35}$$

なので、式 (34), (35) を式 (33) に代入すれば

$$\begin{aligned}
I &= \left(\frac{x}{t} - u\right)^2 [t \rho(x, t)] - 2 \left(\frac{x}{t} - u\right) \frac{1}{t} [t^2 \rho(x, t) \left(\frac{x}{t} - u\right)] + \frac{1}{t^2} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 a_0 \left(\frac{x-y}{t}, y\right) dy \\
&= -t \rho(x, t) \left(\frac{x}{t} - u\right)^2 + \frac{1}{t^2} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 a_0 \left(\frac{x-y}{t}, y\right) dy
\end{aligned}$$

この I を式 (32) に代入して

$$\begin{aligned}
T(x, t) &= -\frac{1}{3R} \left(\frac{x}{t} - u\right)^2 + \frac{1}{3R \rho(x, t) t^3} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 a_0 \left(\frac{x-y}{t}, y\right) dy \\
&\quad + \frac{1}{3R \rho(x, t) t} \int_{-\infty}^{\infty} b_0 \left(\frac{x-y}{t}, y\right) dy
\end{aligned} \tag{36}$$

5. 衝撃波管問題のマクロ量

式 (28), (30), (36) のマクロ量の計算式に衝撃波管問題の初期条件式 (18), (19) を代入して、衝撃波管問題のマクロ量を求める。

5.1 密度

式 (28) に式 (18) を代入して

$$\begin{aligned}
&\rho(x, t) \\
&= \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\{1 - H(y)\} \frac{\rho_l}{(2\pi R T_l)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{2 R T_l t^2} \right\} + H(y) \frac{\rho_r}{(2\pi R T_r)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{2 R T_r t^2} \right\} \right] dy \\
&= \frac{1}{t} \frac{\rho_l}{(2\pi R T_l)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{2 R T_l t^2} \right\} dy + \frac{1}{t} \frac{\rho_r}{(2\pi R T_r)^{1/2}} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{2 R T_r t^2} \right\} dy \tag{37}
\end{aligned}$$

右辺第 1,2 項の積分に、付録 B の公式 (B.2),(B.1) を適用すれば、

$$\begin{aligned}
 & \rho(x, t) \\
 &= \frac{1}{t} \frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}} \frac{\sqrt{2\pi RT_l} t}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{2RT_l} t} \right) + \frac{1}{t} \frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}} \frac{\sqrt{2\pi RT_r} t}{2} \operatorname{erfc} \left(-\frac{x}{\sqrt{2RT_r} t} \right) \\
 &= \frac{\rho_l}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{2RT_l} t} \right) + \frac{\rho_r}{2} \operatorname{erfc} \left(-\frac{x}{\sqrt{2RT_r} t} \right) \tag{38}
 \end{aligned}$$

ここで

$$\xi = \frac{x}{t} \tag{39}$$

と置けば

$$\rho(x, t) = \frac{\rho_l}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi}{\sqrt{2RT_l}} \right) + \frac{\rho_r}{2} \operatorname{erfc} \left(-\frac{\xi}{\sqrt{2RT_r}} \right) \tag{40}$$

5.2 マクロ流速

式 (30) に式 (18) を代入して

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{x}{t} - \frac{1}{\rho(x, t)t^2} \int_{-\infty}^{\infty} y \left[\{1 - H(y)\} \frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{2RT_l t^2} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + H(y) \frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{2RT_r t^2} \right\} \right] dy \\
 &= \frac{x}{t} - \frac{1}{\rho(x, t)t^2} \frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 y \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{2RT_l t^2} \right\} dy \\
 &\quad - \frac{1}{\rho(x, t)t^2} \frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}} \int_0^{\infty} y \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{2RT_r t^2} \right\} dy \tag{41}
 \end{aligned}$$

右辺第 2,3 項の積分に、付録 B の公式 (B.4),(B.3) を適用すれば、

$$\begin{aligned}
 & u(x, t) \\
 &= \frac{x}{t} - \frac{1}{\rho(x, t)t^2} \frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}} \left[\frac{x\sqrt{2\pi RT_l} t}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{2RT_l} t} \right) - \frac{2RT_l t^2}{2} \exp \left(-\frac{x^2}{2RT_l t^2} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{\rho(x, t)t^2} \frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}} \left[\frac{x\sqrt{2\pi RT_r} t}{2} \operatorname{erfc} \left(-\frac{x}{\sqrt{2RT_r} t} \right) + \frac{2RT_r t^2}{2} \exp \left(-\frac{x^2}{2RT_r t^2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x}{t} - \frac{\rho_l}{2\rho(x,t)} \left[\frac{x}{t} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{2RT_l t}} \right) - \sqrt{\frac{2RT_l}{\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2RT_l t^2} \right) \right] \\
&\quad - \frac{\rho_r}{2\rho(x,t)} \left[\frac{x}{t} \operatorname{erfc} \left(-\frac{x}{\sqrt{2RT_r t}} \right) + \sqrt{\frac{2RT_r}{\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2RT_r t^2} \right) \right] \\
&= \frac{x}{t} - \frac{1}{\rho(x,t)} \frac{x}{t} \left[\frac{\rho_l}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{2RT_l t}} \right) + \frac{\rho_r}{2} \operatorname{erfc} \left(-\frac{x}{\sqrt{2RT_r t}} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2\rho(x,t)} \left[\rho_l \sqrt{\frac{2RT_l}{\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2RT_l t^2} \right) - \rho_r \sqrt{\frac{2RT_r}{\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2RT_r t^2} \right) \right] \\
&= \frac{x}{t} - \frac{1}{\rho(x,t)} \frac{x}{t} [\rho(x,t)] \\
&\quad + \frac{1}{2\rho(x,t)} \left[\rho_l \sqrt{\frac{2RT_l}{\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2RT_l t^2} \right) - \rho_r \sqrt{\frac{2RT_r}{\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2RT_r t^2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2\rho(x,t)} \left[\rho_l \sqrt{\frac{2RT_l}{\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2RT_l t^2} \right) - \rho_r \sqrt{\frac{2RT_r}{\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2RT_r t^2} \right) \right] \tag{42}
\end{aligned}$$

式 (39) の $\xi = x/t$ より

$$u(x,t) = \frac{1}{2\rho(x,t)} \left[\rho_l \sqrt{\frac{2RT_l}{\pi}} \exp \left(-\frac{\xi^2}{2RT_l} \right) - \rho_r \sqrt{\frac{2RT_r}{\pi}} \exp \left(-\frac{\xi^2}{2RT_r} \right) \right] \tag{43}$$

5.3 温度

式 (36) に式 (18),(19) を代入して

$$\begin{aligned}
&T(x,t) \\
&= -\frac{1}{3R} \left(\frac{x}{t} - u \right)^2 + \frac{1}{3R\rho(x,t)t^3} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \left[\{1 - H(y)\} \frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{2RT_l t^2} \right\} \right. \\
&\quad \left. + H(y) \frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{2RT_r t^2} \right\} \right] dy \\
&\quad + \frac{1}{3R\rho(x,t)t} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\{1 - H(y)\} \frac{2RT_l \rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{2RT_l t^2} \right\} \right. \\
&\quad \left. + H(y) \frac{2RT_r \rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{2RT_r t^2} \right\} \right] dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{3R} \left(\frac{x}{t} - u \right)^2 + \frac{1}{3R\rho(x,t)t^3} \frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 y^2 \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{2RT_l t^2} \right\} dy \\
&\quad + \frac{1}{3R\rho(x,t)t^3} \frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}} \int_0^{\infty} y^2 \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{2RT_r t^2} \right\} dy \\
&\quad + \frac{1}{3R\rho(x,t)t} \frac{2RT_l \rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{2RT_l t^2} \right\} dy \\
&\quad + \frac{1}{3R\rho(x,t)t} \frac{2RT_r \rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{2RT_r t^2} \right\} dy \tag{44}
\end{aligned}$$

右辺第 2,3 項の積分に、付録 B の公式 (B.6),(B.5) を適用し、第 4,5 項を若干書き換え

$$\begin{aligned}
&T(x,t) \\
&= -\frac{1}{3R} \left(\frac{x}{t} - u \right)^2 + \frac{1}{3R\rho(x,t)t^3} \frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}} \left[\frac{(2RT_l t^2 + 2x^2)\sqrt{2RT_l \pi} t}{4} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{2RT_l t}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2RT_l t^2 x}{2} \exp \left(-\frac{x^2}{2RT_l t^2} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{3R\rho(x,t)t^3} \frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}} \left[\frac{(2RT_r t^2 + 2x^2)\sqrt{2RT_r \pi} t}{4} \operatorname{erfc} \left(-\frac{x}{\sqrt{2RT_r t}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2RT_r t^2 x}{2} \exp \left(-\frac{x^2}{2RT_r t^2} \right) \right] \\
&\quad + \frac{2T_l}{3\rho(x,t)} \frac{1}{t} \frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{2RT_l t^2} \right\} dy \\
&\quad + \frac{2T_r}{3\rho(x,t)} \frac{1}{t} \frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{2RT_r t^2} \right\} dy \\
&= -\frac{1}{3R} \left(\frac{x}{t} - u \right)^2 + \frac{\rho_l}{3R\rho(x,t)} \left[\frac{2RT_l + 2(x/t)^2}{4} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{2RT_l t}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(x/t)}{2} \sqrt{\frac{2RT_l}{\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2RT_l t^2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\rho_r}{3R\rho(x,t)} \left[\frac{2RT_r + 2(x/t)^2}{4} \operatorname{erfc} \left(-\frac{x}{\sqrt{2RT_r t}} \right) + \frac{(x/t)}{2} \sqrt{\frac{2RT_r}{\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2RT_r t^2} \right) \right] \\
& + \frac{2T_l}{3\rho(x,t)} \frac{\rho_l}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{2RT_l t}} \right) + \frac{2T_r}{3\rho(x,t)} \frac{\rho_r}{2} \operatorname{erfc} \left(-\frac{x}{\sqrt{2RT_r t}} \right)
\end{aligned} \tag{45}$$

(下線部の積分は式 (37)(38) で既出)

式 (38) の $\xi = x/t$ より

$$\begin{aligned}
& T(x,t) \\
& = -\frac{1}{3R} (\xi - u)^2 + \frac{\rho_l}{3R\rho(x,t)} \frac{1}{2} \left[\frac{2RT_l + 2\xi^2}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi}{\sqrt{2RT_l}} \right) - \sqrt{\frac{2RT_l}{\pi}} \xi \exp \left(-\frac{\xi^2}{2RT_l} \right) \right] \\
& + \frac{\rho_r}{3R\rho(x,t)} \frac{1}{2} \left[\frac{2RT_r + 2\xi^2}{2} \operatorname{erfc} \left(-\frac{\xi}{\sqrt{2RT_r}} \right) + \sqrt{\frac{2RT_r}{\pi}} \xi \exp \left(-\frac{\xi^2}{2RT_r} \right) \right] \\
& + \frac{2T_l}{3\rho(x,t)} \frac{\rho_l}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi}{\sqrt{2RT_l}} \right) + \frac{2T_r}{3\rho(x,t)} \frac{\rho_r}{2} \operatorname{erfc} \left(-\frac{\xi}{\sqrt{2RT_r}} \right)
\end{aligned} \tag{46}$$

式 (46) 右辺第 1,2,3 項は x 方向の並進温度、第 4,5 項は y, z 方向の並進温度に相当する。

参考文献

- [1] Narasimha, R. : Collisionless expansion of gases into vacuum : Journal of Fluid Mechanics Vol.12(1962), pp.294-308.
- [2] 吉江琢児 : 初等第一階偏微分方程式 : 裳華房 1947 年

付録 A. 縮退分布関数の初期条件

• $a(c_x, x, t)$ に対する初期条件 $a_0(c_x, x)$ は、本文式 (16) の f_0 に本文式 (5) を代入して

$$\begin{aligned}
 a_0(c_x, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(c_x, c_y, c_z, x) dc_y dc_z \\
 &= \{1 - H(x)\} \frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_l}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{c_y^2}{2RT_l}\right) dc_y \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{c_z^2}{2RT_l}\right) dc_z \\
 &\quad + H(x) \frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_r}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{c_y^2}{2RT_r}\right) dc_y \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{c_z^2}{2RT_r}\right) dc_z \quad (A.1)
 \end{aligned}$$

積分公式

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a}\right)^{(n+1)/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad (A.2)$$

で $n = 0$ とした

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a}\right)^{1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a}\right)^{1/2} \sqrt{\pi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2} \quad (A.3)$$

により

$$\begin{aligned}
 a_0(c_x, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(c_x, c_y, c_z, x) dc_y dc_z \\
 &= \{1 - H(x)\} \frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_l}\right) (2\pi RT_l)^{1/2} (2\pi RT_l)^{1/2} \\
 &\quad + H(x) \frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_r}\right) (2\pi RT_r)^{1/2} (2\pi RT_r)^{1/2} \\
 &= \{1 - H(x)\} \frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}} \exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_l}\right) + H(x) \frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}} \exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_r}\right) \quad (A.4)
 \end{aligned}$$

• $b(c_x, x, t)$ に対する初期条件 $b_0(c_x, x)$ は、本文式 (17) の f_0 に本文式 (5) を代入して

$$\begin{aligned}
 b_0(c_x, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (c_y^2 + c_z^2) f_0(c_x, c_y, c_z, x) dc_y dc_z \\
 &= \{1 - H(x)\} \frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_l}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (c_y^2 + c_z^2) \exp\left(-\frac{c_y^2 + c_z^2}{2RT_l}\right) dc_y dc_z
 \end{aligned}$$

$$+H(x)\frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{3/2}}\exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_r}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(c_y^2+c_z^2)\exp\left(-\frac{c_y^2+c_z^2}{2RT_r}\right)dc_ydc_z \quad (A.5)$$

式 (A.5) 右辺第 1 項の下線部の積分 I は以下の様に計算される。

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(c_y^2+c_z^2)\exp\left(-\frac{c_y^2+c_z^2}{2RT_l}\right)dc_ydc_z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}c_y^2\exp\left(-\frac{c_y^2+c_z^2}{2RT_l}\right)dc_ydc_z + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}c_z^2\exp\left(-\frac{c_y^2+c_z^2}{2RT_l}\right)dc_ydc_z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}c_y^2\exp\left(-\frac{c_y^2}{2RT_l}\right)dc_y\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{c_z^2}{2RT_l}\right)dc_z \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{c_y^2}{2RT_l}\right)dc_y\int_{-\infty}^{\infty}c_z^2\exp\left(-\frac{c_z^2}{2RT_l}\right)dc_z \end{aligned}$$

積分公式 (A.2) で $n = 2$ とした

$$\int_0^{\infty}x^2e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^{3/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^{3/2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}\right)^{3/2}\sqrt{\pi} \quad (A.6)$$

と、(A.3) より

$$I = \frac{1}{2}(2RT_l)^{3/2}\sqrt{\pi} \cdot (2RT_l)^{1/2}\sqrt{\pi} + (2RT_l)^{1/2}\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2}(2RT_l)^{3/2}\sqrt{\pi} = (2RT_l)^2\pi \quad (A.7)$$

同様にして式 (A.5) 右辺第 2 項の積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(c_y^2+c_z^2)\exp\left(-\frac{c_y^2+c_z^2}{2RT_r}\right)dc_ydc_z = (2RT_r)^2\pi \quad (A.8)$$

となる。

式 (A.7) と (A.8) より式 (A.5) は

$$\begin{aligned} b_0(c_x, x) &= \{1 - H(x)\}\frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{3/2}}\exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_l}\right)(2RT_l)^2\pi \\ &\quad + H(x)\frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{3/2}}\exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_r}\right)(2RT_r)^2\pi \\ &= \{1 - H(x)\}\frac{2RT_l\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}}\exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_l}\right) + H(x)\frac{2RT_r\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}}\exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_r}\right) \quad (A.9) \end{aligned}$$

付録 B. 積分公式 (1)

以下の積分公式において、 a, x はパラメータで $a > 0, -\infty < x < \infty$ 、関数 $\operatorname{erfc}(y)$ は

$$\operatorname{erfc}(y) = 1 - \operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_y^\infty e^{-t^2} dt \quad , \quad \operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt$$

である。

$$\int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{a} \right\} dy = \frac{\sqrt{a\pi}}{2} \operatorname{erfc} \left(-\frac{x}{\sqrt{a}} \right) \quad (B.1)$$

$$\int_{-\infty}^0 \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{a} \right\} dy = \frac{\sqrt{a\pi}}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{a}} \right) \quad (B.2)$$

$$\int_0^\infty y \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{a} \right\} dy = \frac{x\sqrt{a\pi}}{2} \operatorname{erfc} \left(-\frac{x}{\sqrt{a}} \right) + \frac{a}{2} \exp \left(-\frac{x^2}{a} \right) \quad (B.3)$$

$$\int_{-\infty}^0 y \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{a} \right\} dy = \frac{x\sqrt{a\pi}}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{a}} \right) - \frac{a}{2} \exp \left(-\frac{x^2}{a} \right) \quad (B.4)$$

$$\int_0^\infty y^2 \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{a} \right\} dy = \frac{(a + 2x^2)\sqrt{a\pi}}{4} \operatorname{erfc} \left(-\frac{x}{\sqrt{a}} \right) + \frac{ax}{2} \exp \left(-\frac{x^2}{a} \right) \quad (B.5)$$

$$\int_{-\infty}^0 y^2 \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{a} \right\} dy = \frac{(a + 2x^2)\sqrt{a\pi}}{4} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{a}} \right) - \frac{ax}{2} \exp \left(-\frac{x^2}{a} \right) \quad (B.6)$$

● 公式 (B.1) の導出

変数変換

$$p = -\frac{x-y}{\sqrt{a}} \quad , \quad y = \sqrt{a}p + x \quad , \quad dy = \sqrt{a}dp \quad (B.7)$$

により

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{a} \right\} dy &= \int_{-x/\sqrt{a}}^\infty e^{-p^2} \sqrt{a} dp = \sqrt{a} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/\sqrt{a}}^\infty e^{-p^2} dp \\ &= \frac{\sqrt{a\pi}}{2} \operatorname{erfc} \left(-\frac{x}{\sqrt{a}} \right) \end{aligned} \quad (B.8) = (B.1)$$

● 公式 (B.2) の導出

変数変換

$$q = \frac{x-y}{\sqrt{a}} \quad , \quad y = -\sqrt{a}q + x \quad , \quad dy = -\sqrt{a}dq \quad (B.9)$$

により

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{a} \right\} dy &= \int_{\infty}^{x/\sqrt{a}} e^{-q^2} (-\sqrt{a}) dq = \sqrt{a} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{a}}^{\infty} e^{-q^2} dp \\ &= \frac{\sqrt{a\pi}}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{a}} \right) \end{aligned} \quad (B.10) = (B.2)$$

● 公式 (B.3) の導出

変数変換 (B.7) により

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{a} \right\} dy &= \int_{-x/\sqrt{a}}^{\infty} (\sqrt{a}p + x) e^{-p^2} \sqrt{a} dp \\ &= a \int_{-x/\sqrt{a}}^{\infty} p e^{-p^2} dp + x \int_{-x/\sqrt{a}}^{\infty} e^{-p^2} \sqrt{a} dp \end{aligned}$$

右辺第 1 項に積分公式 (C.1) を適用し、右辺第 2 項の積分は式 (B.8) 第 2 番目の積分であることに注意すれば

$$\int_0^{\infty} y \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{a} \right\} dy = \frac{a}{2} \exp \left(-\frac{x^2}{a} \right) + \frac{x\sqrt{a\pi}}{2} \operatorname{erfc} \left(-\frac{x}{\sqrt{a}} \right) \quad (B.11) = (B.3)$$

● 公式 (B.4) の導出

変数変換 (B.9) により

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 y \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{a} \right\} dy &= \int_{\infty}^{x/\sqrt{a}} (-\sqrt{a}q + x) e^{-q^2} (-\sqrt{a}) dq \\ &= a \int_{\infty}^{x/\sqrt{a}} q e^{-q^2} dq + x \int_{\infty}^{x/\sqrt{a}} e^{-q^2} (-\sqrt{a}) dq \end{aligned}$$

右辺第 1 項に積分公式 (C.2) を適用し、右辺第 2 項の積分は式 (B.10) 第 2 番目の積分であることに注意すれば

$$\int_{-\infty}^0 y \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{a} \right\} dy = -\frac{a}{2} \exp \left(-\frac{x^2}{a} \right) + \frac{x\sqrt{a\pi}}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{a}} \right) \quad (B.12) = (B.4)$$

● 公式 (B.5) の導出

変数変換 (B.7) により

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty y^2 \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{a} \right\} dy &= \int_{-x/\sqrt{a}}^\infty (\sqrt{a}p + x)^2 e^{-p^2} \sqrt{a} dp \\
 &= \int_{-x/\sqrt{a}}^\infty (ap^2 + 2\sqrt{a}px + x^2) e^{-p^2} \sqrt{a} dp \\
 &= a^{3/2} \int_{-x/\sqrt{a}}^\infty p^2 e^{-p^2} dp + 2ax \int_{-x/\sqrt{a}}^\infty p e^{-p^2} dp + x^2 \int_{-x/\sqrt{a}}^\infty e^{-p^2} \sqrt{a} dp
 \end{aligned}$$

右辺第 1,2 項の積分に積分公式 (C.3),(C.1) を適用し、右辺第 3 項の積分は式 (B.8) 第 2 番目の積分であることに注意すれば

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty y^2 \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{a} \right\} dy &= a^{3/2} \left[-\frac{x}{2\sqrt{a}} \exp \left(-\frac{x^2}{a} \right) + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \operatorname{erfc} \left(-\frac{x}{\sqrt{a}} \right) \right] \\
 &+ 2ax \left[\frac{1}{2} \exp \left(-\frac{x^2}{a} \right) \right] + x^2 \left[\frac{\sqrt{a\pi}}{2} \operatorname{erfc} \left(-\frac{x}{\sqrt{a}} \right) \right] \\
 &= \frac{ax}{2} \exp \left(-\frac{x^2}{a} \right) + \frac{(a + 2x^2)\sqrt{a\pi}}{4} \operatorname{erfc} \left(-\frac{x}{\sqrt{a}} \right) \quad (B.13) = (B.5)
 \end{aligned}$$

● 公式 (B.6) の導出

変数変換 (B.9) により

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^0 y^2 \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{a} \right\} dy &= \int_\infty^{x/\sqrt{a}} (-\sqrt{a}q + x)^2 e^{-q^2} (-\sqrt{a}) dq \\
 &= \int_\infty^{x/\sqrt{a}} (aq^2 - 2\sqrt{a}qx + x^2) e^{-q^2} (-\sqrt{a}) dq \\
 &= -a^{3/2} \int_\infty^{x/\sqrt{a}} q^2 e^{-q^2} dq + 2ax \int_\infty^{x/\sqrt{a}} q e^{-q^2} dq + x^2 \int_\infty^{x/\sqrt{a}} e^{-q^2} (-\sqrt{a}) dq
 \end{aligned}$$

右辺第 1,2 項の積分に積分公式 (C.4),(C.2) を適用し、右辺第 3 項の積分は式 (B.10) 第 2 番

目の積分であることに注意すれば

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty y^2 \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{a} \right\} dy &= -a^{3/2} \left[-\frac{x}{2\sqrt{a}} \exp \left(-\frac{x^2}{a} \right) - \frac{\sqrt{\pi}}{4} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{a}} \right) \right] \\
 + 2ax \left[-\frac{1}{2} \exp \left(-\frac{x^2}{a} \right) \right] &+ x^2 \left[\frac{\sqrt{a\pi}}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{a}} \right) \right] \\
 = -\frac{ax}{2} \exp \left(-\frac{x^2}{a} \right) &+ \frac{(a+2x^2)\sqrt{a\pi}}{4} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{a}} \right) \qquad (B.14) = (B.6)
 \end{aligned}$$

付録 C. 積分公式 (2)

以下の積分公式において、 a, x はパラメータで $a > 0, -\infty < x < \infty$ 、関数 $\operatorname{erfc}(y)$ は

$$\operatorname{erfc}(y) = 1 - \operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_y^\infty e^{-t^2} dt \quad , \quad \operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt$$

である。

$$\int_{-x/\sqrt{a}}^\infty p e^{-p^2} dp = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) \quad (C.1)$$

$$\int_\infty^{x/\sqrt{a}} p e^{-p^2} dp = -\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) \quad (C.2)$$

$$\int_{-x/\sqrt{a}}^\infty p^2 e^{-p^2} dp = -\frac{x}{2\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \operatorname{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\right) \quad (C.3)$$

$$\int_\infty^{x/\sqrt{a}} p^2 e^{-p^2} dp = -\frac{x}{2\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{4} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) \quad (C.4)$$

● 公式 (C.1) の導出

変数変換

$$p^2 = t \quad , \quad p = \sqrt{t} \quad , \quad 2p dp = dt \quad (C.5)$$

により

$$\int_{-x/\sqrt{a}}^\infty p e^{-p^2} dp = \int_{x^2/a}^\infty e^{-t} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} [-e^{-t}]_{x^2/a}^\infty = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) \quad (C.6) = (C.1)$$

● 公式 (C.2) の導出

式 (C.1) で積分の上下限を入れ換えて

$$\int_\infty^{-x/\sqrt{a}} p e^{-p^2} dp = -\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right)$$

$x \rightarrow -x$ とすれば

$$\int_\infty^{x/\sqrt{a}} p e^{-p^2} dp = -\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) \quad (C.7) = (C.2)$$

● 公式 (C.3) の導出

$$\int_{-x/\sqrt{a}}^\infty p^2 e^{-p^2} dp = \int_{-x/\sqrt{a}}^0 p^2 e^{-p^2} dp + \int_0^\infty p^2 e^{-p^2} dp \quad (C.8)$$

(C.8) 右辺第2項の積分は、付録Aの積分公式 (A.2) より

$$\int_0^\infty p^2 e^{-p^2} dp = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad (C.9)$$

(C.8) 右辺第1項の積分は

$$\frac{d}{dp} e^{-p^2} = -2pe^{-p^2} \quad \text{より} \quad pe^{-p^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dp} e^{-p^2}$$

に注意して部分積分する。

$$\begin{aligned} \int_{-x/\sqrt{a}}^0 p^2 e^{-p^2} dp &= -\frac{1}{2} \int_{-x/\sqrt{a}}^0 p \frac{d}{dp} e^{-p^2} dp = -\frac{1}{2} \left\{ \left[pe^{-p^2} \right]_{-x/\sqrt{a}}^0 - \int_{-x/\sqrt{a}}^0 e^{-p^2} dp \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left[-\left\{ -\frac{x}{\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) \right\} + \int_0^{-x/\sqrt{a}} e^{-p^2} dp \right] \\ &= -\frac{x}{2\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\right) \end{aligned} \quad (C.10)$$

式 (C.9), (C.10) を式 (C.8) に代入して

$$\begin{aligned} \int_{-x/\sqrt{a}}^\infty p^2 e^{-p^2} dp &= -\frac{x}{2\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \\ &= -\frac{x}{2\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \operatorname{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\right) \end{aligned} \quad (C.11) = (C.3)$$

● 公式 (C.4) の導出

式 (C.3) で積分の上下限を入れ換えて

$$\int_\infty^{-x/\sqrt{a}} p^2 e^{-p^2} dp = \frac{x}{2\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{4} \operatorname{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$$

$x \rightarrow -x$ とすれば

$$\int_\infty^{x/\sqrt{a}} p^2 e^{-p^2} dp = -\frac{x}{2\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{4} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) \quad (C.12) = (C.4)$$