RAFAL−AKN 解析例 (3)

熱力学第一法則の確認 (2)

● 計算内容

文献 [1] にある下記の問題を圧力レベルを変化させて解析する。

図 1 に示す断熱壁に囲まれた長方形容器を隔壁で等体積 V に分割し、左側に温度 T_1, 圧力 p、右側に温度 T_2, 圧力 p のアルゴンガスを封入する。時刻 $t = 0$ に隔壁を除去した後、十分時間が経過して達成された平衡状態の計算値を理論値と比較する。

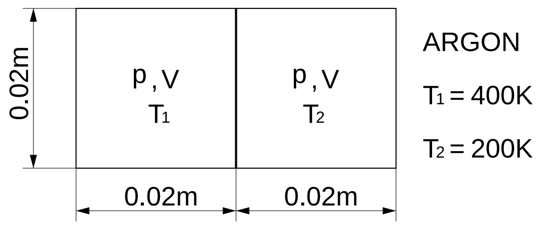


図 1　解析領域

ここで、容器寸法は図 1 に示すもので 2 次元問題として解析する (紙面に垂直方向 1m の領域を解析)。温度 T_1, T_2 は $T_1 = 400$K,$T_1 = 200$K とする。圧力は表 1 に示す、6 種の圧力レベルとする。

	圧力 (Pa)
CASE1	$p = 10^{-4}$
CASE2	$p = 10^{-2}$
CASE3	$p = 1$
CASE4	$p = 10^{2}$
CASE5	$p = 10^{4}$
CASE6	$p = 10^{6}$

表 1　圧力

● 理論解

容器壁面は固定された断熱壁なので、隔壁除去前後で系の内部エネルギーは変化せず圧力 p も変化しない。従って、気体が理想気体であれば隔壁除去後十分時間が経過して平衡

状態が達成されたときの系の温度 T は以下のように求められる。

隔壁除去前の左側右側の気体の密度 ρ_1, ρ_2

$$\rho_1 = \frac{p}{RT_1} \quad , \quad \rho_2 = \frac{p}{RT_2}$$

ここで、R は単位質量当り気体定数。

隔壁除去前の容器内気体の質量 M

隔壁左右の体積を V とすれば、

$$M = (\rho_1 + \rho_2)V$$

隔壁除去後の平衡状態における気体の密度 ρ

$$\rho = \frac{M}{2V} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$$

隔壁除去後の平衡状態における気体の温度 T

$$T = \frac{p}{\rho R} = \frac{2p}{(\rho_1 + \rho_2)R}$$

CASE6 の場合の数値例

隔壁除去前の左側右側の気体の密度 ρ_1, ρ_2 は、アルゴンの気体定数 208.1324(J/(kgK)) より

$$\rho_1 = \frac{10^6}{208.1324 \times 400} = 12.01158 \ (\mathrm{kg/m^3}) \quad , \quad \rho_2 = \frac{10^6}{208.1324 \times 200} = 24.02317 \ (\mathrm{kg/m^3})$$

隔壁除去後の平衡状態における気体の密度 ρ

$$\rho = \frac{12.01158 + 24.02317}{2} = 18.01738 \ (\mathrm{kg/m^3})$$

隔壁除去後の平衡状態における気体の温度 T

$$T = \frac{10^6}{18.01738 \times 208.1324} = 266.6666 \ (\mathrm{K})$$

● 計算条件

解析領域のセル分割

図 1 の解析領域を $40 \times 20 = 800$ セルに分割する。

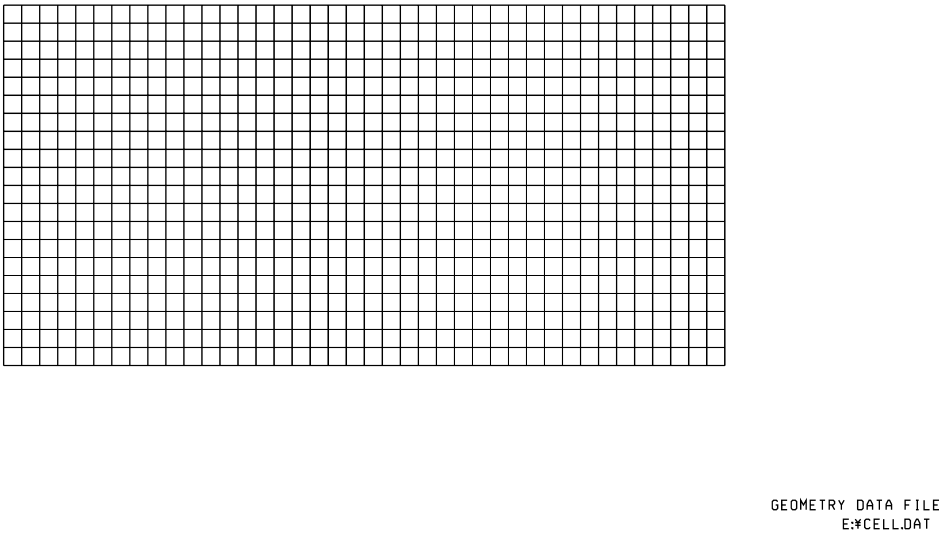


図 2　解析領域セル分割図

境界条件

解析領域境界に対応するセル境界を、鏡面反射境界として断熱条件を課す。

速度空間

DVM(discrete velocity method) では、分子速度の空間を有限個の点に離散化して各点における速度分布関数の値を求め、その分布関数から数値積分によりマクロ量を算出する。この時の速度空間の設定を表 2 に示す。数値積分法は、表 2 に示す速度空間を表 2 に示す分点数で等分割した台形公式を用いた。

	速度空間	分点数
CASE1	$[-2000\text{m}, 2000\text{m}] \times [-2000\text{m}, 2000\text{m}]$	51×51
CASE2	$[-2000\text{m}, 2000\text{m}] \times [-2000\text{m}, 2000\text{m}]$	51×51
CASE3	$[-2000\text{m}, 2000\text{m}] \times [-2000\text{m}, 2000\text{m}]$	51×51
CASE4	$[-2000\text{m}, 2000\text{m}] \times [-2000\text{m}, 2000\text{m}]$	51×51
CASE5	$[-2000\text{m}, 2000\text{m}] \times [-2000\text{m}, 2000\text{m}]$	31×31
CASE6	$[-2000\text{m}, 2000\text{m}] \times [-2000\text{m}, 2000\text{m}]$	31×31

表 2　速度空間と分点数

CASE5,6 で分点数が 31×31 と CASE1∼4 より少なくなっているのは、計算時間を短縮するためである。

解析時間

隔壁除去後の平衡状態達成までの時間は圧力レベルにより異なる。平衡状態達成と思われるまでの各ケースの解析時間を表 3 に示す。

	解析時間 (s)
CASE1	0.1
CASE2	0.05
CASE3	0.05
CASE4	0.05
CASE5	0.5
CASE6	5

表 3　解析時間

● 計算結果

隔壁除去後、表 3 に示した時間が経過した時点での解析領域内のマクロ量の 800 セルの平均値を表 4 に示す。

	密度 (kg/m^3)	流速絶対値 (m/s)	温度 (T)	圧力 (Pa)
CASE1	1.802×10^{-9}	3.120×10^{-6}	266.7	1.000×10^{-4}
CASE2	1.802×10^{-7}	2.191×10^{-12}	266.7	1.000×10^{-2}
CASE3	1.802×10^{-5}	2.220×10^{-13}	266.7	1.000
CASE4	1.802×10^{-3}	8.341×10^{-12}	266.7	1.000×10^{2}
CASE5	1.802×10^{-1}	5.845×10^{-4}	266.7	1.000×10^{4}
CASE6	1.802×10	4.127×10^{-4}	266.7	1.000×10^{6}

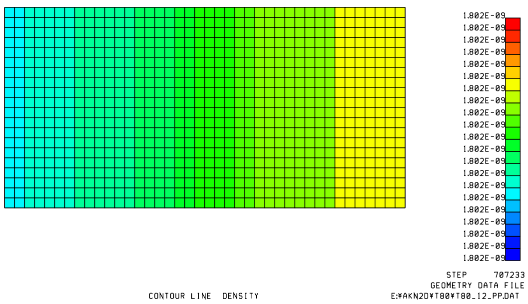
表 4　マクロ量の平均値

表 5 に計算値の理論値に対する相対誤差を示す。

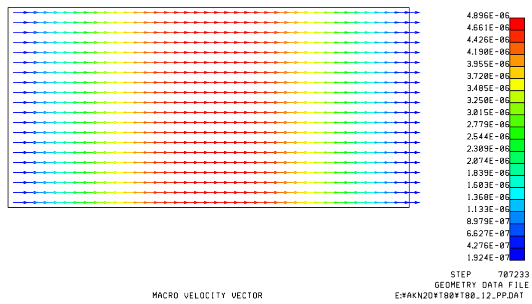
	密度	温度	圧力
CASE1	0	0	0
CASE2	0	0	0
CASE3	0	0	0
CASE4	0	0	0
CASE5	0	0	0
CASE6	0	0	0

表 5　マクロ量計算値の理論値に対する相対誤差 (%)

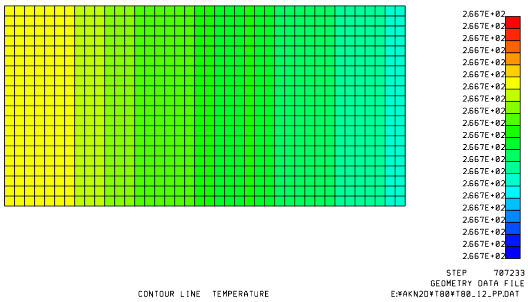
隔壁除去後、表 3 に示す解析時間が経過した時点でのマクロ量の分布を図 3∼ 図 8 に示す。



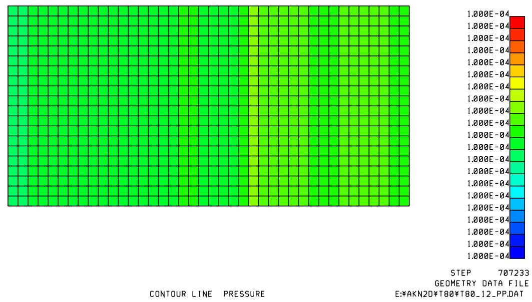
密度 (kg/m^3)



流速 (m/s)

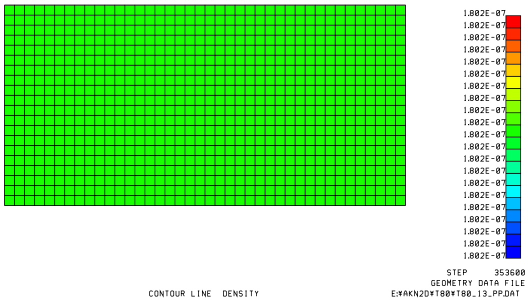


温度 (K)

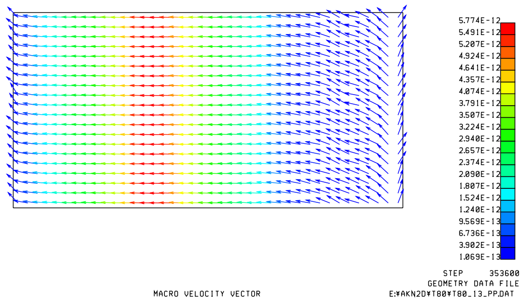


圧力 (Pa)

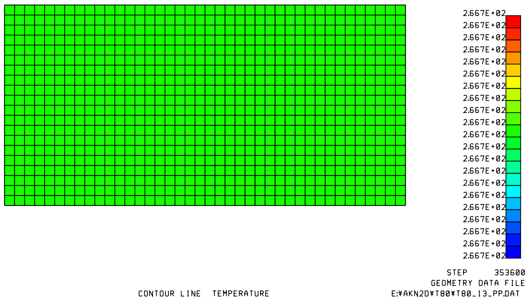
図 3　CASE1 (圧力 = 10^{-4}Pa)



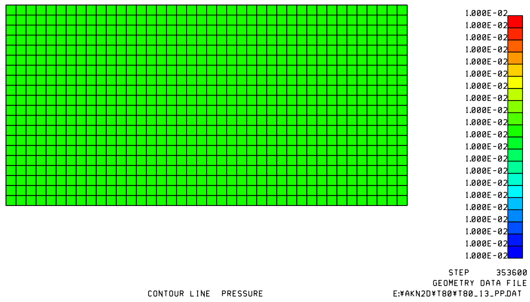
密度 (kg/m^3)



流速 (m/s)

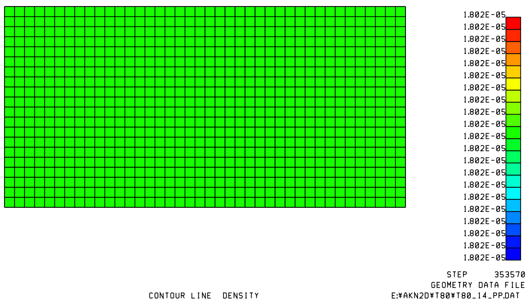


温度 (K)

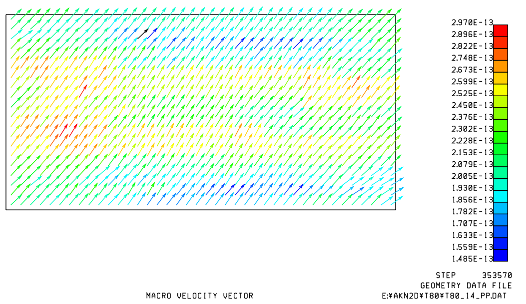


圧力 (Pa)

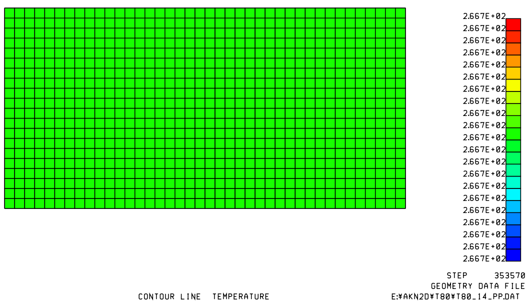
図 4　CASE2 (圧力 = 10^{-2}Pa)



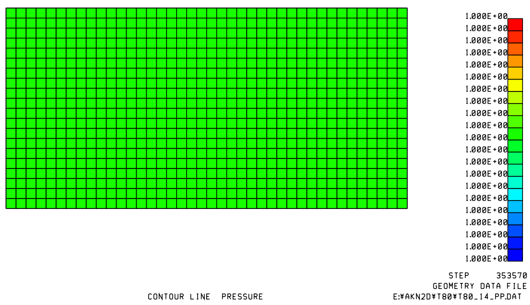
密度 (kg/m^3)



流速 (m/s)

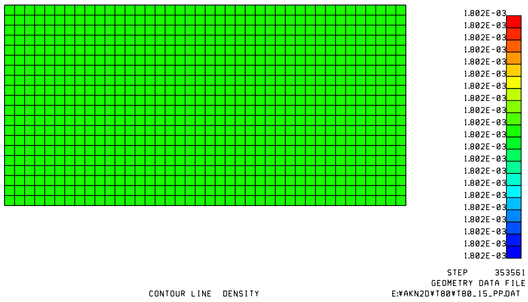


温度 (K)

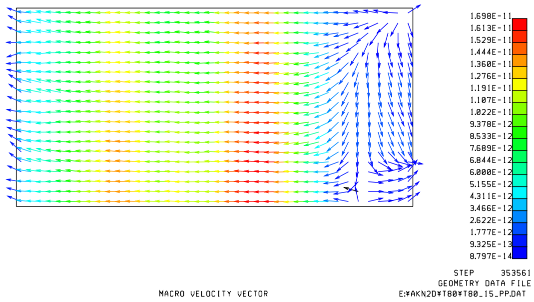


圧力 (Pa)

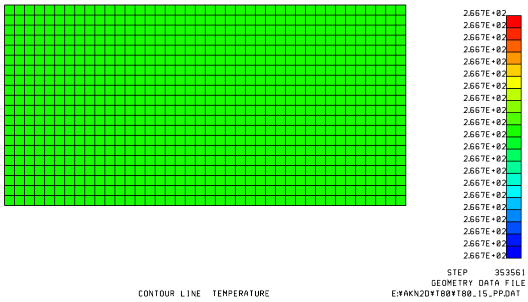
図 5　CASE3 (圧力 = 1Pa)



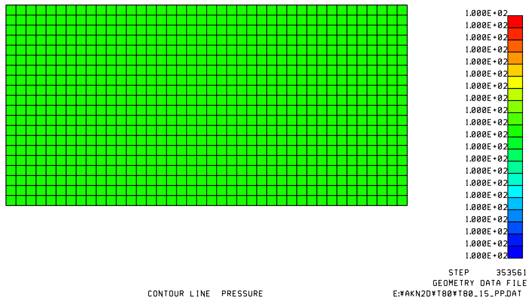
密度 (kg/m^3)



流速 (m/s)

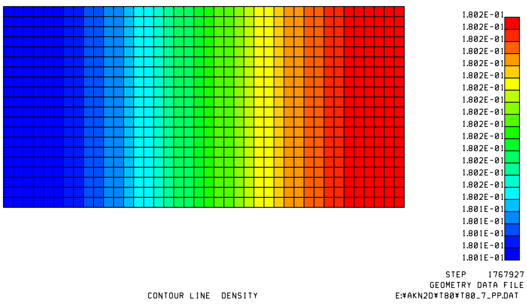


温度 (K)

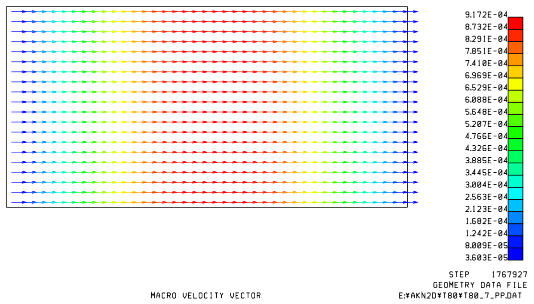


圧力 (Pa)

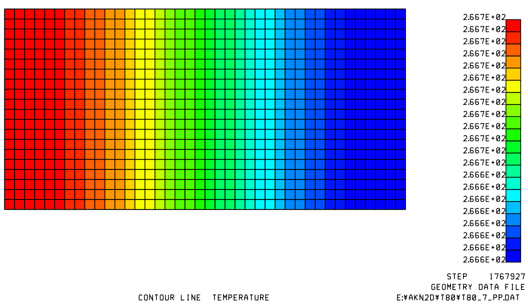
図 6　CASE4 (圧力 = 10^2Pa)



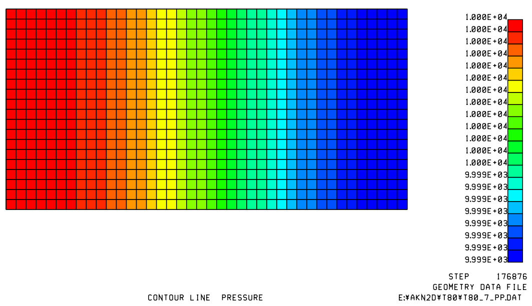
密度 (kg/m^3)



流速 (m/s)

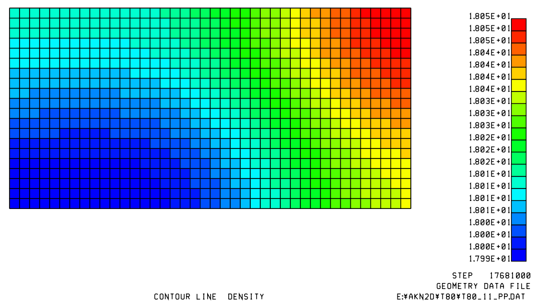


温度 (K)

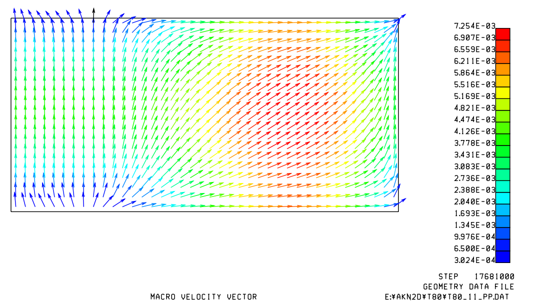


圧力 (Pa)

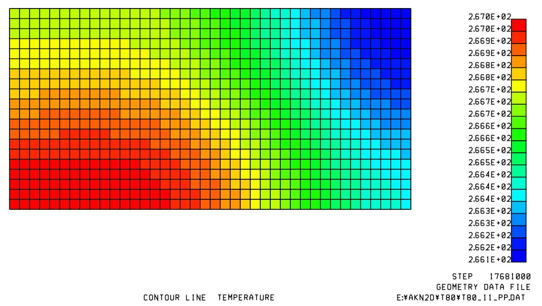
図 7　CASE5 (圧力 = 10^4Pa)



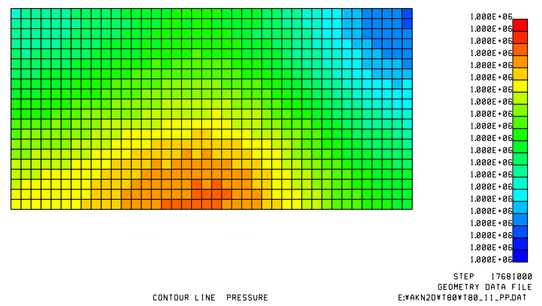
密度 (kg/m^3)



流速 (m/s)



温度 (K)



圧力 (Pa)

図 8　CASE6 (圧力 = 10^6Pa)

● **検討**

・圧力レベルが低い程、平衡状態達成までの時間が短くなっている。これは隔壁除去後の隔壁左右から相手側への分子移動が圧力レベルが低い自由分子流領域では、相手側への分子の自由運動による移動過程であるのに対して、圧力レベルが高い連続流領域では、分子間衝突によりこの移動過程が妨げられることに対応している。

・表 4,5 によれば密度, 温度, 圧力の 800 セルの平均値は、全ケースで有効数字 4 桁まで理論値と一致している。圧力レベルの高い CASE5,6 で流速ベクトルの絶対値が大きいのは、解析時間が短く平衡状態が完全には達成されていないためと思われる。一方、圧力レベルが一番低い CASE1 で流速ベクトルの絶対値が大きい理由は不明である。

・図 3∼8 によれば、圧力レベルの低い CASE1,2,3,4 では密度, 圧力, 温度はほぼ一様であるのに対して圧力レベルの高い CASE5,6 では有効数字 5 桁目以下に若干の分布がある。これは前項と同じ理由によると思われる。

・流速ベクトルは、CASE2,3,4 では絶対値が 10^{-12}(m/s) 以下で理論値ゼロに対する誤差となっている。CASE1,5 では流速ベクトル絶対値が 10^{-4}(m/s) 程度で、流速ベクトルの方向はほぼ x 方向 (解析領域長手方向) となっているのに対して、圧力レベルが一番高い

CASE6 では流速ベクトル絶対値が 10^{-3}(m/s) 程度で 2 次元的な流れとなっている。この理由は不明である。

● 文献

[1] リープマン・ロシュコ著 , 玉田　訳 : 気体力学 : 吉岡書店 (1971),p.17.