

MGL 方程式について

目 次

1. 微小すきま内の気体流	1
2. MGL 方程式	5
3. 流量係数 (1)(連続流, すべり流の場合)	11
3.1 連続流の流量係数	11
3.2 すべり流の流量係数	12
4. 流量係数 (2)(希薄流の場合)	14
4.1 速度分布関数	14
4.2 BGK モデル方程式とその線形化	16
4.3 無限平行二平板間の定常希薄流	17
4.4 希薄流の流量係数	25
付録 A. 運動する曲面の法線方向速度	29
付録 B. BGK モデル方程式とその線形化	31
付録 C. 速度分布関数 f に対する境界条件とその線形化	39
付録 D. $D \rightarrow 0 (K_n \rightarrow \infty)$ におけるポアズイユ流の流量係数	49
付録 E. 積分 $T_0(x)$ の $x \approx 0$ における挙動 (1)	52
付録 F. 積分 $f(x) = \int_0^\infty e^{-u^2}/(u+x)du$ の $x \approx 0$ における挙動	55
付録 G. 積分 $T_0(x)$ の $x \approx 0$ における挙動 (2)	61

1. 微小すきま内の気体流

対向する二つの固体壁面によって形成された微小すきま内の気体流を考える。簡単のため、一方の固体壁面は平面とする。この平面を xy 面としたとき、もう一方の固体壁面は図 1.1 に示すように z 軸正の側にあるとする。

すきまを形成する二つの固体壁面の x 方向の広がりを l 、 y 方向の広がりを b 、固体壁面間のすきまを h とする。 h は b, l に比べて非常に小さく $h \ll l, h \ll b$ であり、 b と l は同程度の大きさ $b \sim l$ であるとする。また、すきま h は座標 x, y および時間 t の関数 $h = h(x, y, t)$ であるとする。

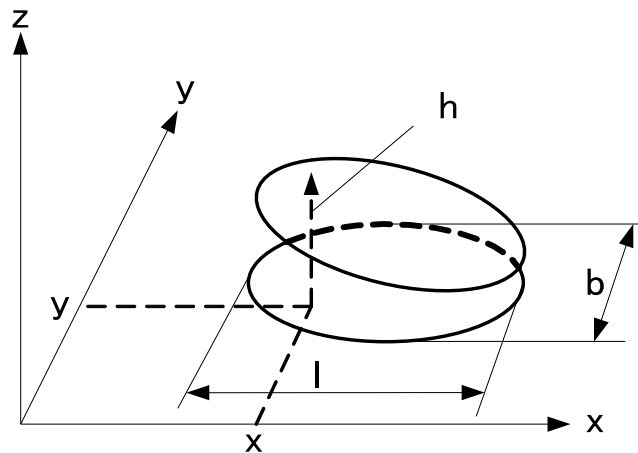


図 1.1 二つの固体壁面が形成する微小すきま

微小すきま内の気体流は、一般の圧縮粘性流と同様に連続方程式、ナビエ・ストークス方程式、エネルギー方程式により支配される。しかし、すきま h が微小であることによる流れの特徴を考慮すれば、方程式の簡単化が可能となる。

まず、微小すきまを形成する固体壁面の温度が一定という仮定を導入する。このとき微小すきま内の気体流は等温流であるという仮定が有効となり、エネルギー方程式は状態方程式に置き換えられる。

すなわち、微小すきま内の流れを支配する方程式は、
連続方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.1)$$

粘性係数 μ を一定 (等温流の仮定と整合)、第 2 粘性係数をゼロ (単原子気体については厳密に成立) と仮定したナビエ・ストークス方程式

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\text{grad}p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\mu}{3} \text{grad} \text{div} \mathbf{v}, \quad (1.2)$$

気体を理想気体と仮定した状態方程式

$$p = \rho RT \quad (1.3)$$

となる。ここに、 ρ は密度、 v は流速ベクトル (その x, y, z 成分は u, v, w とする)、 p は圧力、 R は単位質量当り気体定数、 T は気体および固体壁面の温度である。

次に、連続方程式の各項の大きさを評価する。ベクトル表示の連続方程式 (1.1) を書き直して、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0.$$

ここで、 $\partial/\partial x \sim 1/l$, $\partial/\partial y \sim 1/b \sim 1/l$, $\partial/\partial z \sim 1/h$ であることと、時間 t を l/u で測って $\partial/\partial t \sim u/l$ であることから、連続方程式の各項の大きさは、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\rho u}{l} \quad \frac{\rho u}{l} \quad \frac{\rho v}{b} \sim \frac{\rho u}{l} \quad \frac{\rho w}{h}$$

となる。第 1,2,3 項の大きさは同程度であり、これと第 4 項の大きさが同程度となるため

$$w \sim \frac{h}{l}u \quad (1.4)$$

となる。

同様にナビエ・ストークス方程式 (1.2) の各項の大きさを評価する。ナビエ・ストークス方程式 (1.2) の x 成分の各項の大きさは、

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\frac{u^2}{l} \quad \frac{u^2}{l} \quad \frac{u^2}{l} \quad \frac{h u u}{l h} \quad \frac{u}{l^2} \quad \frac{u}{l^2} \quad \frac{u}{h^2} \quad \frac{u}{l^2} \quad \frac{u}{l^2} \quad \frac{1}{lh} \frac{h u}{l}$$

となる。

粘性係数 μ の掛かった項では、 $\partial^2 u / \partial z^2$ の項の大きさに対するそれ以外の項の大きさの比が $(h/l)^2 \ll 1$ となり、 $\partial^2 u / \partial z^2$ 以外の項は無視される。また、この残された粘性項と左辺の慣性項の大きさの比は、 $(h/l)^2 ul / (\mu/\rho) = (h/l)^2 Re \ll 1$ となり (ここで $ul / (\mu/\rho) = Re$ はレイノルズ数)、左辺の各項も無視される。結局残された粘性項と圧力勾配の項が釣り合うことになり、ナビエ・ストークス方程式の x 成分は、

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.5)$$

と簡単化される。

ナビエ・ストークス方程式の y 成分

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

も全く同様にして簡単化され、

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (1.6)$$

となる。

ナビエ・ストークス方程式の z 成分の各項の大きさは、

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\frac{u}{l} \frac{hu}{l} \quad \frac{u}{l} \frac{hu}{l} \quad \frac{u}{l} \frac{hu}{l} \quad \frac{h^2 u^2}{l^2} \frac{1}{h} \quad \frac{hu}{l^3} \quad \frac{hu}{l^3} \quad \frac{hu}{lh^2} \quad \frac{u}{lh} \quad \frac{u}{lh} \quad \frac{hu}{h^2 l}$$

となる。この場合も慣性項は粘性項に対して無視され、残された粘性項と圧力勾配の項が釣り合うが、粘性項自身が小さいため、

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.7)$$

となる。

以上では固体壁面の一方を平面と仮定して式 (1.4)~(1.7) を導いたが、微小すきまを形成する二つの固体壁面の両方が曲面であってもその曲率が小さい場合は同様の評価が成立する。すなわち、微小すきま内の気体流の一般的特徴として

- (1) すきま幅方向 (z 方向) の流速 (w) は小さく、すきま幅方向に対して垂直な 2 方向 (x, y 方向) の流速 (u, v) に比べて無視できる
 - (2) すきま幅方向に対して垂直な 2 方向 (x, y 方向) の流れは、それぞれの方向の圧力勾配と固体壁面からの距離のみに依存する
 - (3) 圧力は、すきま幅方向 (z 方向) に変化せず一定である
- が結論できる。

すきま h が気体分子の平均自由行程 λ と同程度になる場合は、気体が分子の集団であることに起因する希薄気体効果が現れ、気体を連続体として扱うことが不適切になる。希薄気体効果の程度はクヌーゼン数 $K_n = \lambda/h$ の大きさを示され、

- (a) $K_n < 0.01$ の場合は、気体を連続体として扱える (連続流),
- (b) $0.01 < K_n < 0.1$ の場合は、気体は連続体として扱えるが固体壁面での境界条件に速度

および温度の跳びを考慮する必要が生じる (すべり流),

(c) $0.1 < K_n < 10$ の場合は、ボルツマン方程式による解析が必要 (中間流),

(d) $K_n > 10$ の場合は、衝突項を無視したボルツマン方程式による解析が可能 (自由分子流)

となる。

上記の微小すきま内の気体流の一般的特徴は、その導出過程や連続流の基礎方程式がボルツマン方程式から (種々の仮定の下にはあるが) 導かれることから、希薄気体効果が現れる場合にも成立すると考えられる。

2. MGL 方程式

微小すきま内の気体流を支配する方程式は、1章で述べた微小すきま内の気体流の特徴を考慮して構成される。ここでは、希薄気体効果が現れる場合にも適用可能な分子気体潤滑方程式 (molecular gas lubrication equation, 略称 MGL 方程式) の導出過程を示す。

簡単のため図 2.1 に示すように、微小すきまを形成する二つ固体壁面の一方は xy 平面上にあり、もう一方は、

$$z = h(x, y, t) \quad (2.1)$$

で表される面とする。

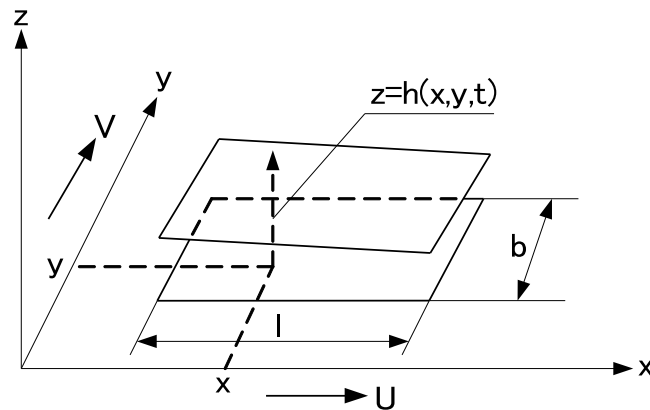


図 2.1 微小すきま領域と座標系の一例

連続方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

を xy 面上の固体壁面の各点 (x, y) において、 z 方向に 0 から $h(x, y, t)$ まで積分する。連続方程式第 1 項の積分は、関係式

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho dz = \int_0^h \frac{\partial \rho}{\partial t} dz + [\rho]_{z=h} \frac{\partial h}{\partial t}$$

より、

$$\int_0^h \frac{\partial \rho}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho dz - [\rho]_{z=h} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.3)$$

となる。

同様に連続方程式第 2,3 項の積分は、

$$\int_0^h \frac{\partial \rho u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho u dz - [\rho u]_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (2.4)$$

$$\int_0^h \frac{\partial \rho v}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h \rho v dz - [\rho v]_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y} \quad (2.5)$$

となり、連続方程式第 4 項の積分は、

$$\int_0^h \frac{\partial \rho w}{\partial z} dz = [\rho w]_{z=h} - [\rho w]_{z=0} = [\rho w]_{z=h} \quad (2.6)$$

(xy 面上の固体壁面においてはこの面に垂直な流速成分 w はゼロ、 $[w]_{z=0} = 0$ より)

となる。式 (2.3)~(2.6) より

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h \rho v dz - [\rho]_{z=h} \frac{\partial h}{\partial t} - [\rho u]_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} - [\rho v]_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y} + [\rho w]_{z=h} = 0 \quad (2.7)$$

を得る。上式の下線部を

$$[\rho]_{z=h} \left\{ -\frac{\partial h}{\partial t} - [u]_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} - [v]_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y} + [w]_{z=h} \right\}$$

と書き直し {} 内を検討する。

式 (2.1) で表される固体壁面を $h(x, y, t) - z = 0$ の形に書けば、この固体壁面の法線方向の単位ベクトルは、

$$\frac{\left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, -1 \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + 1}}$$

となり、この固体壁面上 ($z = h$ 面上) における気体速度の法線方向成分 v_n は

$$v_n = (u, v, w)_{z=h} \cdot \frac{\left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, -1 \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + 1}} = \frac{[u]_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + [v]_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y} - [w]_{z=h}}{\sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + 1}}$$

となる。

一方、固体壁面の法線方向速度 h_n は、

$$h_n = \frac{-\frac{\partial h}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + 1}}$$

であるから (付録 A 参照)、気体が固体壁面を透過しないという条件 $v_n = h_n$ より

$$-\frac{\partial h}{\partial t} - [u]_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} - [v]_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y} + [w]_{z=h} = 0$$

を得る。すなわち、{} 内したがって式 (2.7) の下線部がゼロとなり、式 (2.7) は

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h \rho v dz = 0 \quad (2.8)$$

となる。

式 (2.8) の各項の積分において、微小すきま内の気体流の特徴である圧力が z 方向に一定、したがって等温流の仮定の下に密度も z 方向に一定を考慮すれば、 ρ は積分記号の外に出る。また、第 2,3 項の積分を

$$q_x = \rho \int_0^h u dz \quad , \quad q_y = \rho \int_0^h v dz$$

とおけば、式 (2.8) は

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \quad (2.9)$$

となる。ここで、 q_x, q_y はそれぞれ x, y 方向の質量流量を表し、微小すきま内の流れにより決定される。

微小すきま内の流れは、圧力勾配に起因するポアズイユ流れと、 xy 面上にある固体壁面の面内方向移動に起因する (圧力勾配を伴わない) クエット流れを重ね合わせた流れとなる。なお、クエット流れを考える場合は、 x, y 面上の固体壁面の面内方向の拡がりは十分大きく、この固体壁面の移動によって微小すきまが形成されなくなることは無いものとする。

ポアズイユ流れの x, y 方向成分は、微小すきま内の気体流の特徴から、それぞれ x, y 方向の圧力勾配のみに依存し、このポアズイユ流れによる x, y 方向の質量流量 q_{P_x} と q_{P_y} は

$$q_{P_x} = -\frac{h^2}{\sqrt{2RT}} \frac{\partial p}{\partial x} Q_P \quad , \quad q_{P_y} = -\frac{h^2}{\sqrt{2RT}} \frac{\partial p}{\partial y} Q_P$$

と表される。上式の詳細については 3 章で説明される。ここでは、以下の説明に必要な事項のみを述べておく。式中の Q_P は流量係数と呼ばれる無次元量で、平行に配置された無限二平板間のポアズイユ流れを解析することにより決定される。流量係数 Q_P は、このポアズイユ流れの解析において採用される仮定により異なり、連続流を仮定して決定したものを Q_{con} 、これに 1 次スリップ近似を加えて修正したものを Q_{1st} 、ボルツマン方程式に基づいて決定したものを Q_B と書く。以下に必要な Q_{con} の具体形を示しておく。

$$Q_{con} = \frac{ph}{6\mu\sqrt{2RT}} = \frac{p_a h_0 PH}{6\mu\sqrt{2RT}} = \frac{D_0 PH}{6} \quad , \quad \left(D_0 \equiv \frac{p_a h_0}{\mu\sqrt{2RT}}, \quad P = \frac{p}{p_a}, \quad H = \frac{h}{h_0} \right) \quad (2.10)$$

ここで p_a は基準圧力、 h_0 は基準すきま幅である。

クエット流れによる x, y 方向の質量流量 q_{C_x}, q_{C_y} は、流れの希薄度とは無関係に

$$q_{C_x} = \frac{\rho U h}{2} \quad , \quad q_{C_y} = \frac{\rho V h}{2}$$

と表される。この式の詳細についても3章で説明される。ここで、 U は xy 面上の固体壁面の x 方向移動速度、 V は y 方向移動速度である。

以上より x, y 方向の質量流量 q_x, q_y はポアズイユ流れによるものとクエット流れによるものとの和として求まり

$$q_x = q_{P_x} + q_{C_x} = -\frac{h^2}{\sqrt{2RT}} \frac{\partial p}{\partial x} Q_P + \frac{\rho U h}{2} \quad (2.11)$$

$$q_y = q_{P_y} + q_{C_y} = -\frac{h^2}{\sqrt{2RT}} \frac{\partial p}{\partial y} Q_P + \frac{\rho V h}{2} \quad (2.12)$$

となる。

式 (2.11),(2.12) を式 (2.9) に代入し無次元化する。まず、変数 x, y, p, h, t を

$$X = x/l, \quad Y = y/l, \quad P = p/p_a, \quad H = h/h_0, \quad \hat{T} = t/t_0$$

と無次元化する。ここに、 p_a は基準圧力、 h_0 は基準すきま幅、 t_0 は基準時間である。 p_a としては標準大気圧、 h_0 としては最小すきま幅、 t_0 としては主要な振動モードの周期などが用いられる。この無次元変数と状態方程式 (1.3) により、式 (2.11),(2.12) は

$$q_x = -\frac{1}{\sqrt{2RT}} \frac{p_a h_0^2}{l} H^2 \frac{\partial P}{\partial X} Q_P + \frac{p_a h_0 U}{2RT} PH$$

$$q_y = -\frac{1}{\sqrt{2RT}} \frac{p_a h_0^2}{l} H^2 \frac{\partial P}{\partial Y} Q_P + \frac{p_a h_0 V}{2RT} PH$$

となる。

ここで式 (2.10) の Q_{con} に対する表現 $Q_{con} = p_a h_0 PH / 6\mu\sqrt{2RT}$ を用いて上式を書き直せば

$$q_x = -\frac{1}{12\mu RT} \frac{p_a^2 h_0^3}{l} PH^3 \frac{Q_P}{Q_{con}} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{p_a h_0 U}{2RT} PH,$$

$$q_y = -\frac{1}{12\mu RT} \frac{p_a^2 h_0^3}{l} PH^3 \frac{Q_P}{Q_{con}} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{p_a h_0 V}{2RT} PH$$

となる。

この q_x, q_y を式 (2.9) に代入して無次元方程式

$$\sigma \frac{\partial PH}{\partial \hat{T}} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{Q_P}{Q_{con}} PH^3 \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{Q_P}{Q_{con}} PH^3 \frac{\partial P}{\partial Y} \right) - \Lambda_X \frac{\partial PH}{\partial X} - \Lambda_Y \frac{\partial PH}{\partial Y} \quad (2.13)$$

を得る。ここで、無次元定数 σ はスクィーズ数、 Λ_X, Λ_Y はそれぞれ x, y 方向のベアリング数と呼ばれ

$$\sigma = \frac{12\mu l^2}{p_a h_0^2 t_0}, \quad \Lambda_X = \frac{6\mu U l}{p_a h_0^2}, \quad \Lambda_Y = \frac{6\mu V l}{p_a h_0^2} \quad (2.14)$$

である。

さらに

$$\bar{Q} \equiv \frac{Q_P}{Q_{con}} \quad (2.15)$$

とおけば、式(2.13)は

$$\sigma \frac{\partial PH}{\partial \hat{T}} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\bar{Q} PH^3 \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\bar{Q} PH^3 \frac{\partial P}{\partial Y} \right) - \Lambda_X \frac{\partial PH}{\partial X} - \Lambda_Y \frac{\partial PH}{\partial Y} \quad (2.16)$$

となる。

(2.10) で示された Q_{con} に対する表現 $Q_{con} = D_0 PH/6$ を用いれば、式(2.16)の()内の因子 $\bar{Q} PH^3$ は

$$\bar{Q} PH^3 = \frac{Q_P PH^3}{Q_{con}} = \frac{Q_P PH^3}{D_0 PH/6} = \frac{Q_P}{D_0/6} H^2$$

となり、ここで

$$\tilde{Q} \equiv \frac{Q_P}{D_0/6} \quad (2.17)$$

とおけば式(2.16)は

$$\sigma \frac{\partial PH}{\partial \hat{T}} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\tilde{Q} H^2 \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\tilde{Q} H^2 \frac{\partial P}{\partial Y} \right) - \Lambda_X \frac{\partial PH}{\partial X} - \Lambda_Y \frac{\partial PH}{\partial Y} \quad (2.18)$$

となる。

式(2.13),(2.16),(2.18)は数学的には同一の内容を表す。これらの式中の流量係数 Q_P に Q_{con} を用いたものをレイノルズ方程式、 Q_{1st} を用いたものを修正レイノルズ方程式、 Q_B を用いたものを分子気体潤滑方程式 (MGL 方程式) と呼ぶ。

上記の方程式は関数 $h(x, y, t)$ が時間的に変化しない静解析の場合は、未知変数 P に対する2階の放物形偏微分方程式となり、すきま端部での P の挙動を指定する境界値問題として解かれる。この方程式は非線形方程式であり、解析解を求めることは困難であるため、一般的な場合に対しては数値的に解かれる。また、関数 $h(x, y, t)$ が時間 t と共に変化する動解析の場合は、 $h(x, y, t)$ の時間的変化を支配する固体壁面の運動方程式と連立して解かれる。

以上の説明においては、 $z = h(x, y, t)$ で表される固体壁面は滑らか [関数 $h(x, y, t)$ が連続的に微分可能] であると暗黙のうちに仮定していたが、実際の問題では固体壁面に段差 [関数 $h(x, y, t)$ の不連続] や、折れ目 [関数 $h(x, y, t)$ の微分の不連続] がある場合もある。そのような場合には、関数 $h(x, y, t)$ が区分的に滑らかであるそれぞれの領域において、上記の方程式が区分的に成立すると考える。

本説明書では、式(2.18)の形の方程式を基礎式とするので、変数の説明と共に方程式を次ページに再記する。

微小すきま内の気体流を支配する方程式

$$\sigma \frac{\partial PH}{\partial \hat{T}} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\tilde{Q} H^2 \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\tilde{Q} H^2 \frac{\partial P}{\partial Y} \right) - \Lambda_X \frac{\partial PH}{\partial X} - \Lambda_Y \frac{\partial PH}{\partial Y} \quad (2.19)$$

ここで

$P = p/p_a$	無次元圧力
p	圧力 [Pa]
p_a	基準圧力 [Pa]
$H = h/h_0$	無次元すきま幅
h	すきま幅 [m]
h_0	基準すきま幅 [m]
$\hat{T} = t/t_0$	無次元時間
t	時間 [s]
t_0	基準時間 [s]
$X = x/l$	無次元 x 座標
x	x 座標 [m]
l	x 方向基準長 [m]
$Y = y/l$	無次元 y 座標
y	y 座標 [m]
$\sigma = 12\mu l^2/p_a h_0^2 t_0$	スキーズ数
μ	粘性係数 [Pa·s]
$\Lambda_X = 6\mu U l/p_a h_0^2$	x 方向ベアリング数
U	xy 面上の固体壁面の面内方向移動速度 x 成分 [m/s]
$\Lambda_Y = 6\mu V l/p_a h_0^2$	y 方向ベアリング数
V	xy 面上の固体壁面の面内方向移動速度 y 成分 [m/s]
$\tilde{Q} = Q_P/(D_0/6)$	(変形された) 流量係数比
Q_P	流量係数 ($Q_P = Q_{con}$ or Q_{1st} or Q_B)
D_0	$D_0 = p_a h_0/(\mu\sqrt{2RT})$ で定義される数値
R	単位質量当り気体定数 [J/kg·K]

3. 流量係数 (1)(連続流, すべり流の場合)

微小すきま内の気体流を支配する方程式中の流量係数は、平行に配置された無限二平板間の流れを解析することより決定される。この二平板の一方を xy 面、他方を $z = h$ 面 (図 3.1 参照) として、 xy 面上の平板が x 軸正の向きに速度 U で移動し、 x 軸方向のみに圧力勾配がある場合を考える。このとき y 方向に流れの状態は変化しない。

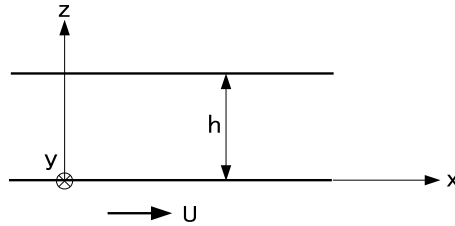


図 3.1 平行二平板間の流れ

3.1 連続流の流量係数

クヌーゼン数 K_n が十分小さい連続流の場合は、式 (1.5),(1.7) が上記の流れを支配する方程式となる。すなわち、

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

が支配方程式となる。

連続流の場合の境界条件である固体壁面における気体流の付着条件を現在の問題に適用すれば、

$$u|_{z=0} = U, \quad u|_{z=h} = 0 \quad (3.3)$$

となる。

u に対する常微分方程式 (3.1) を、境界条件 (3.3) の下に解けば、

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z(h-z) + \frac{U}{h}(h-z) \quad (3.4)$$

を得る。 x 方向流れの質量流量 (y 方向単位長当り) q_x は、

$$\begin{aligned} q_x &= \rho \int_0^h u dz = -\frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^h z(h-z) dz + \frac{\rho U}{h} \int_0^h (h-z) dz = -\frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^3}{6} + \frac{\rho U}{h} \left(h^2 - \frac{h^2}{2} \right) \\ &= -\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho U h}{2} = -\frac{p h^3}{12\mu R T} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho U h}{2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる。右辺第1項は圧力勾配によるポアズイユ流からの寄与であり、第2項は下面の移動によるクエット流からの寄与である。

式(3.5)右辺第1項のポアズイユ流による質量流量を、

$$-\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{h^2}{\sqrt{2RT}} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{ph}{6\mu\sqrt{2RT}} = -\frac{h^2}{\sqrt{2RT}} \frac{\partial p}{\partial x} Q_{con} \quad (3.6)$$

と書き直す。ここで、

$$Q_{con} \equiv \frac{ph}{6\mu\sqrt{2RT}} \quad (3.7)$$

とおいた。さらに

$$Q_{con} = \frac{p_a h_0}{\mu\sqrt{2RT}} \frac{ph}{p_a h_0} \frac{1}{6} = \frac{p_a h_0}{\mu\sqrt{2RT}} \frac{PH}{6}$$

と書き

$$D_0 \equiv \frac{p_a h_0}{\mu\sqrt{2RT}}, \quad D \equiv D_0 PH \quad (3.8)$$

とおけば、連続ポアズイユ流の流量係数

$$Q_{con} = \frac{D_0 PH}{6} = \frac{D}{6} \quad (3.9)$$

を得る。

式(3.8)で定義される D の物理的意味は以下の通りである。 D の定義式

$$D = D_0 PH = \frac{p_a h_0}{\mu\sqrt{2RT}} \frac{p}{p_a} \frac{h}{h_0} = \frac{ph}{\mu\sqrt{2RT}}$$

の粘性係数 μ に、粘性係数 μ と分子平均自由行程 λ との関係

$$\mu = \frac{1}{2} \rho \bar{c} \lambda = \frac{1}{2} \frac{p}{RT} \sqrt{\frac{8RT}{\pi}} \lambda = \frac{p}{\sqrt{2RT}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lambda \quad (3.10)$$

[ここで、 \bar{c} は分子の平均速度で、温度 T の平衡状態にある場合の $\bar{c} = \sqrt{8RT/\pi}$ を用いた] を代入すれば、

$$D = \frac{p\sqrt{\pi}h}{2p\lambda} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{(\lambda/h)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{K_n} \quad (3.11)$$

得る。すなわち、 D はすきまの大きさが h である位置におけるクヌーセン数 $K_n = \lambda/h$ の逆数に比例する。

3.2 すべり流の流量係数

クヌーセン数 K_n が $0.01 < K_n < 0.1$ の範囲にあるすべり流の場合は、式(3.1)に対する境界条件は

$$u|_{z=0} = U + a\lambda \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad u|_{z=h} = -a\lambda \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h} \quad (3.12)$$

となり、気体流は固体壁面に付着せず、すべりを持つ。ここで定数 a は、固体壁面の適応係数 f により

$$a = \frac{2-f}{f} \quad (3.13)$$

と定義される数値である。適応係数 f は $0 \leq f \leq 1$ の値をとる定数で、固体壁面における気体分子の挙動を表す。固体壁面に衝突した気体分子は確率 f で拡散反射し、確率 $1-f$ で鏡面反射する。

すべり流の境界条件 (3.12) の下に解いた常微分方程式 (3.1) の解は

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \{z(h-z) + ha\lambda\} + \frac{(h-z) + a\lambda}{h+2a\lambda} U$$

となり、 x 方向流れの質量流量 (y 方向単位長当り) は、

$$\begin{aligned} q_x &= \rho \int_0^h u dz = -\frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{h^3}{6} + h^2 a \lambda \right) + \frac{\rho U h}{2} = -\frac{p}{2\mu RT} \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{h^3}{6} + h^2 a \lambda \right) + \frac{\rho U h}{2} \\ &= -\frac{h^2}{\sqrt{2RT}} \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{ph}{6\mu\sqrt{2RT}} + \frac{pa\lambda}{\mu\sqrt{2RT}} \right) + \frac{\rho U h}{2} \end{aligned}$$

となる。式 (3.8),(3.10) より

$$q_x = -\frac{h^2}{\sqrt{2RT}} \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{D}{6} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} a \right) + \frac{\rho U h}{2} = -\frac{h^2}{\sqrt{2RT}} \frac{\partial p}{\partial x} Q_{1st} + \frac{\rho U h}{2} \quad (3.14)$$

を得る。ここで、 Q_{1st} はすべりポアズイユ流の流量係数で

$$Q_{1st} = \frac{D}{6} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} a = Q_{con} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} a \quad (3.15)$$

である。

4. 流量係数 (2) (希薄流の場合)

クヌーゼン数 K_n が 0.1 を超える場合は、すきま内の気体を連続体として取り扱うことが不適切になり、ボルツマン方程式に基づく解析が必要になる。しかし、ボルツマン方程式は複雑な非線形微積分方程式であり、この方程式を直接解析的に取り扱うことは極めて難しい。このため、ボルツマン方程式の複雑さの原因である衝突項をモデル化した BGK モデル方程式や、さらにそれを線形化した線形 BGK モデル方程式などの近似方程式が考案されている。以下では線形 BGK モデル方程式に基づく無限平行 2 平板間の定常流れの流量係数の導出過程を文献 [3] に従って説明する。

平行に配置された無限二平板間の一方を xy 面、他方を $z = h$ 面 (図 4.1 参照) として、 xy 面上の平板が x 軸正の向きに速度 U で移動し、 x 軸方向のみに圧力勾配がある場合を考える。このとき y 方向に流れの状態は変化しない。

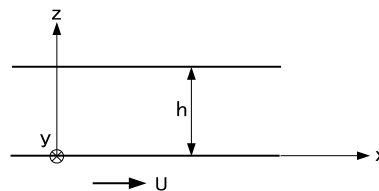


図 4.1 平行二平板間の流れ

4.1 速度分布関数

まず、BGK モデル方程式の未知関数である速度分布関数 f について説明する。速度分布関数 f は分子速度 $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ 、位置 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 、時間 t の関数で以下のように定義される。すなわち、時刻 t において、その位置が物理空間の点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ を含む微小体積要素 $d\mathbf{r} = dx dy dz$ (例えば図 4.2 に示す直方体) 内にあり、

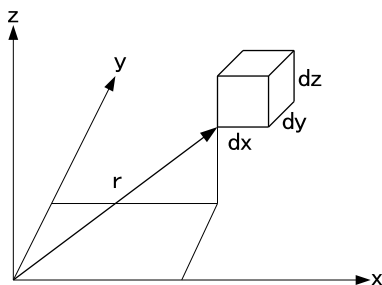


図 4.2 物理空間の微小体積要素

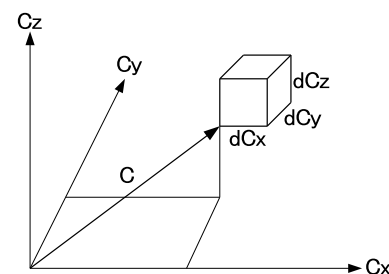


図 4.3 速度空間の微小体積要素

その速度が速度空間の点 $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ を含む微小体積要素 $d\mathbf{c} = (dc_x, dc_y, dc_z)$ (例えば図 4.3 に示す直方体) 内にあるような気体分子の個数が

$$\frac{1}{m} f(c_x, c_y, c_z, x, y, z, t) dc_x dc_y dc_z dx dy dz = \frac{1}{m} f(\mathbf{c}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{c} d\mathbf{r}$$

と表せるとき、 f を速度分布関数という。ここで m は分子 1 個の質量である。速度分布関数 f が与えられたときマクロ物理量は以下のように定義される。

分子数密度 n は、

$$n(x, y, z, t) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(c_x, c_y, c_z, x, y, z, t) dc_x dc_y dc_z$$

と定義される。繁雑さを避けるために関数の引数を省略して

$$n = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f dc_x dc_y dc_z \quad (4.1)$$

と書く。以下同様にして、

密度 ρ は

$$\rho = mn = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f dc_x dc_y dc_z, \quad (4.2)$$

x 方向流速 u は

$$u = \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_x f dc_x dc_y dc_z, \quad (4.3)$$

y 方向流速 v は

$$v = \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_y f dc_x dc_y dc_z, \quad (4.4)$$

z 方向流速 w は

$$w = \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_z f dc_x dc_y dc_z, \quad (4.5)$$

温度 T は

$$T = \frac{1}{3R\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (c_x - u)^2 + (c_y - v)^2 + (c_z - w)^2 \right\} f dc_x dc_y dc_z \quad (4.6)$$

と定義される。ここで R は単位質量当り気体定数である。

系が空間的にも時間的にも一様となる平衡状態における速度分布関数 f_e はマックスウェル分布と呼ばれ

$$f_e = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{(c_x - u)^2 + (c_y - v)^2 + (c_z - w)^2}{2RT} \right\} \quad (4.7)$$

と表される。ここで式の中に含まれる 5 個のパラメータ ρ, u, v, w, T は平衡状態の定義により定数である。

5個のパラメータ ρ, u, v, w, T が位置 r と時間 t の関数であるとき、式 (4.7) の形の分布を局所マックスウェル分布という。

4.2 BGK モデル方程式とその線形化

速度分布関数 f の時間発展を支配するボルツマン方程式の衝突項を単純化した BGK モデル方程式は、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_x \frac{\partial f}{\partial x} + c_y \frac{\partial f}{\partial y} + c_z \frac{\partial f}{\partial z} = \rho A_{col} (f_e - f) \quad (4.8)$$

と書かれる。ここで A_{col} は定数であり、その具体的な値は問題に応じて定められる。

右辺の関数 f_e に含まれるパラメータ ρ, u, v, w, T は式 (4.2) から式 (4.6) に示されるような f を含む積分で表されるため、BGK モデル方程式 (4.8) は非線形の微積分方程式となる。

ここで、微小すきま内の等温流れは静止平衡状態に近いと仮定し、速度分布関数 f を静止平衡状態の速度分布関数 f_0 [(式 (4.7) において $\rho = \rho_0, u = v = w = 0, T = T_0$ としたもの)] と、 f_0 からのずれ $f_0\phi$ との和として

$$f = f_0 + f_0\phi = f_0(1 + \phi) \quad (4.9)$$

と表せば、 ϕ は微小量となる。式 (4.9) の f を式 (4.8) に代入し、 ϕ の2次以上の項を省略し無次元化すれば、以下の線形 BGK モデル方程式を得る (式 (4.10)~式 (4.19) の導出については付録 B 参照)。

$$\begin{aligned} & S \frac{\partial \phi}{\partial \hat{T}} + \zeta_X \frac{\partial \phi}{\partial X} + \zeta_Y \frac{\partial \phi}{\partial Y} + \zeta_Z \frac{\partial \phi}{\partial Z} \\ &= \frac{1}{k_0} \left\{ -\phi + \omega + 2(\zeta_X V_X + \zeta_Y V_Y + \zeta_Z V_Z) + \left(\zeta_X^2 + \zeta_Y^2 + \zeta_Z^2 - \frac{3}{2} \right) \tau \right\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

ここで、 X, Y, Z は適当に選択された長さ l_0 を基準長とする無次元座標、 \hat{T} は適当に選択された時間 t_0 を基準時間とする無次元時間

$$X = \frac{x}{l_0}, \quad Y = \frac{y}{l_0}, \quad Z = \frac{z}{l_0}, \quad \hat{T} = \frac{t}{t_0}, \quad (4.11)$$

である。 S, k_0 は無次元数

$$S = \frac{l_0}{t_0 \sqrt{2RT_0}}, \quad k_0 = \frac{\sqrt{2RT_0}}{l_0 \rho_0 A_{col}} \quad (4.12)$$

である。 T_0 は静止平衡状態の温度、 ρ_0 は静止平衡状態の密度である。

ω, τ はそれぞれ密度、温度の静止平衡状態からの摂動分で

$$\omega = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi E d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z \quad (4.13)$$

$$\tau = \frac{T - T_0}{T_0} = \frac{2}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\zeta_X^2 + \zeta_Y^2 + \zeta_Z^2 - \frac{3}{2} \right) \phi E d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z \quad (4.14)$$

と定義される。式中の E は $\zeta_X, \zeta_Y, \zeta_Z$ の関数

$$E(\zeta_X, \zeta_Y, \zeta_Z) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \exp \left\{ -(\zeta_X^2 + \zeta_Y^2 + \zeta_Z^2) \right\} \quad (4.15)$$

である。

$\zeta_X, \zeta_Y, \zeta_Z$ は、それぞれ分子速度の x, y, z 成分 c_x, c_y, c_z を静止平衡状態における分子の最確速度 $\sqrt{2RT_0}$ で無次元化した

$$\zeta_X = \frac{c_x}{\sqrt{2RT_0}}, \quad \zeta_Y = \frac{c_y}{\sqrt{2RT_0}}, \quad \zeta_Z = \frac{c_z}{\sqrt{2RT_0}} \quad (4.16)$$

であり、 V_X, V_Y, V_Z はそれぞれ流速の x, y, z 成分 u, v, w を同様に無次元化したもので

$$V_X = \frac{u}{\sqrt{2RT_0}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_X \phi E d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z \quad (4.17)$$

$$V_Y = \frac{v}{\sqrt{2RT_0}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_Y \phi E d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z \quad (4.18)$$

$$V_Z = \frac{w}{\sqrt{2RT_0}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_Z \phi E d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z \quad (4.19)$$

である。

4.3 無限平行二平板間の定常希薄気体流

現在の問題に対しては、以下の事項が成立し、線形 BGK モデル方程式 (4.10) は、さらに簡単化される。すなわち、

- (1) 定常問題であるので時間微分の項はゼロ
- (2) y 方向に流れ無しおよび y 方向に変化無しの仮定より、 y 方向流速 V_Y および y 方向微分を含む項はゼロ
- (3) 等温流の仮定より温度の摂動分 $\tau = 0$
- (4) 微小すきま内の気体流の特徴より $V_Z = 0$

が成立し、式 (4.10) は

$$\zeta_X \frac{\partial \phi}{\partial X} + \zeta_Z \frac{\partial \phi}{\partial Z} = \frac{1}{k_0} (-\phi + \omega + 2\zeta_X V_X) \quad (4.20)$$

となる。

ϕ に対する境界条件は、気体分子が上下の固体壁面で拡散反射する場合は以下の様になる。(付録 C 参照)。

$$\phi = \sigma_W + 2\zeta \cdot \mathbf{V}_{wall} + \left(\zeta^2 - \frac{3}{2} \right) \tau_{wall} \quad [(\zeta - \mathbf{V}_{wall}) \cdot \mathbf{n} > 0] \quad (4.21)$$

$$\sigma_W = \sqrt{\pi}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_{wall}) - \frac{1}{2}\tau_{wall} - 2\sqrt{\pi} \int_{(\zeta - \mathbf{V}_{wall}) \cdot \mathbf{n} < 0} (\zeta - \mathbf{V}_{wall}) \cdot \mathbf{n} E \phi d\zeta \quad (4.22)$$

ここで、 \mathbf{n} は固体壁面上に立てた固体壁面外側を正の向きとする単位法線ベクトル、 \mathbf{V}_{wall} は固体壁面運動速度 \mathbf{v}_{wall} を $\sqrt{2RT_0}$ で無次元化した

$$\mathbf{V}_{wall} = \frac{\mathbf{v}_{wall}}{\sqrt{2RT_0}} \quad (4.23)$$

である。上側壁面 $Z = h/l_0 = H$ 面は静止固体壁面であるので $\mathbf{V}_{wall} = (0, 0, 0)$ となり、 $Z = H$ における ϕ に対する境界条件は、

$$\phi = 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_X \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_Y \int_0^{\infty} \zeta_Z E \phi d\zeta_Z \quad (\zeta_Z < 0) \quad (4.24)$$

となる。ここで $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$, $\tau_{wall} = 0$ を用いた。

下側壁面は X 方向に速度 U で移動する固体壁面であるので $\mathbf{V}_{wall} = (U, 0, 0)$ となり、 $Z = 0$ における ϕ に対する境界条件は

$$\begin{aligned} \phi &= 2\zeta_X U - 2\sqrt{\pi} \int_{\zeta \cdot \mathbf{n} < 0} \zeta_Z E \phi d\zeta \\ &= 2\zeta_X U - 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_X \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_Y \int_{-\infty}^0 \zeta_Z E \phi d\zeta_Z \quad (\zeta_Z > 0) \end{aligned} \quad (4.25)$$

となる。ここで $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_{wall} = 0$, $\tau_{wall} = 0$ を用いた。

ここで天下りの的であるが次の相似解を考える。

$$\phi = X \phi_0(\zeta^2) + \zeta_X \phi_1(Z, \zeta_Z, \zeta^2) \quad (4.26)$$

$$\zeta^2 = \zeta \cdot \zeta = \zeta_X^2 + \zeta_Y^2 + \zeta_Z^2$$

この ϕ を式 (4.20) に代入すれば

$$\zeta_X \phi_0 + \zeta_X \zeta_Z \frac{\partial \phi_1}{\partial Z} = \frac{1}{k_0} (-X \phi_0 - \zeta_X \phi_1 + \omega + 2\zeta_X V_X) \quad (4.27)$$

となる。ここで右辺の ω は式 (4.13) で定義され、これに式 (4.26) を代入すれば

$$\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi E d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (X\phi_0 + \zeta_X\phi_1) E d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z$$

となる。右辺第 2 項の被積分関数 $\zeta_X\phi_1 E$ は ζ_X の奇関数であるため区間 $(-\infty, \infty)$ に渡る積分はゼロとなり

$$\omega = X \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0 E d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z \quad (4.28)$$

となる。

式 (4.27) 右辺の V_X は式 (4.17) で定義され、これに式 (4.26) を代入すれば

$$V_X = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_X (X\phi_0 + \zeta_X\phi_1) E d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z$$

となる。ここで右辺の被積分関数第 1 項の $X\zeta_X\phi_0 E$ は ζ_X の奇関数であるため区間 $(-\infty, \infty)$ に渡る積分はゼロになり

$$V_X = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_X^2 \phi_1 E d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z \quad (4.29)$$

となる。

式 (4.28) を式 (4.27) に代入し、式 (4.29) で定義される V_X が X の 0 次の項であることに注意して X の次数に関してまとめると

$$\zeta_X\phi_0 + \zeta_X\zeta_Z \frac{\partial\phi_1}{\partial Z} = \frac{1}{k_0} \left(-X\phi_0 - \zeta_X\phi_1 + X \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0 E d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z + 2\zeta_X V_X \right)$$

を経て

$$\frac{1}{k_0} \left(\phi_0 - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0 E d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z \right) X + \left(\zeta_Z \frac{\partial\phi_1}{\partial Z} + \phi_0 + \frac{1}{k_0}\phi_1 - \frac{2}{k_0}V_X \right) \zeta_X = 0 \quad (4.30)$$

を得る。式 (4.30) が恒等的に成立するためには、 X の 1 次および 0 次の項がそれぞれゼロになる必要がある。すなわち、 ϕ_0, ϕ_1 に対する方程式

$$\phi_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0 E d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z \quad (4.31)$$

$$\zeta_Z \frac{\partial\phi_1}{\partial Z} + \frac{1}{k_0}\phi_1 = \frac{2}{k_0}V_X - \phi_0 \quad (4.32)$$

を得る。

式 (4.31) の右辺の被積分関数 $\phi_0 E$ は ζ^2 の関数であり、その全空間に渡る積分は定数になる。その定数を β とおく。

$$\phi_0 = \text{const.} \equiv \beta \quad (4.33)$$

実際、式 (4.33) の ϕ_0 を式 (4.31) の右辺に代入すれば

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0 E d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z = \beta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z \\ & = \beta \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z \\ & = \beta \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta_X^2} d\zeta_X \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta_Y^2} d\zeta_Y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta_Z^2} d\zeta_Z = \beta \frac{1}{\pi^{3/2}} (\sqrt{\pi})^3 = \beta \end{aligned}$$

となり式 (4.31) の左辺を得る。すなわち $\phi_0 = \text{const.} = \beta$ は式 (4.31) を満足する。

式 (4.28) によれば $\beta = d\omega/dX$ であるから、 β は X 方向の無次元密度勾配を表す。また現在の問題は等温流であるので β は X 方向の無次元圧力勾配でもある。

式 (4.32) は V_X が ϕ_1 を含む積分式 (4.29) により定義されるため ϕ_1 に対する微積分方程式であり、境界条件は ϕ に対する境界条件 (4.24), (4.25) から以下ようになる。

$Z = H$ における ϕ に対する境界条件 (4.24) に式 (4.26) の ϕ を代入すれば

$$X\phi_0 + \zeta_X\phi_1 = 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_X \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_Y \int_0^{\infty} \zeta_Z (X\phi_0 + \zeta_X\phi_1) E d\zeta_Z$$

となり、

$$\begin{aligned} & \left(\phi_0 - 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_X \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_Y \int_0^{\infty} \zeta_Z \phi_0 E d\zeta_Z \right) X \\ & + \zeta_X\phi_1 - 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_X \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_Y \int_0^{\infty} \zeta_Z \zeta_X \phi_1 E d\zeta_Z = 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

となる。式 (4.34) が恒等的に成立するには X の 1 次および 0 次の項がそれぞれゼロになる必要がある。すなわち $Z = H$ における ϕ_0, ϕ_1 に対する条件

$$\phi_0 = 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_X \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_Y \int_0^{\infty} \zeta_Z \phi_0 E d\zeta_Z \quad (4.35)$$

$$\zeta_X\phi_1 = 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_X \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_Y \int_0^{\infty} \zeta_Z \zeta_X \phi_1 E d\zeta_Z \quad (4.36)$$

を得る。

式 (4.35) の右辺は $\phi_0 = \beta = \text{const.}$ を考慮すれば

$$2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_X \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_Y \int_0^{\infty} \zeta_Z \phi_0 E d\zeta_Z$$

$$\begin{aligned}
&= 2\sqrt{\pi} \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta_x^2} d\zeta_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta_y^2} d\zeta_y \int_0^{\infty} \zeta_z \beta e^{-\zeta_z^2} d\zeta_z \\
&= \frac{2\beta}{\pi} (\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi}) \left(\frac{1}{2}\right) = \beta
\end{aligned}$$

となり式 (4.35) の左辺を得る。すなわち $\phi_0 = \beta$ は $Z = H$ における境界条件 (4.35) を満足する。

式 (4.36) の右辺の被積分関数 $\zeta_z \zeta_x \phi_1 E$ は ζ_x の奇関数であるから、 $(-\infty, \infty)$ に渡る積分はゼロとなる。これより $Z = H$ における ϕ_1 に対する境界条件は

$$\phi_1 |_{Z=H} = 0 \quad (4.37)$$

となる。

同様に $Z = 0$ における ϕ に対する境界条件 (4.25) に式 (4.26) の ϕ を代入すれば

$$X\phi_0 + \zeta_x \phi_1 = 2\zeta_x U - 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_x \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_y \int_{-\infty}^0 \zeta_z (X\phi_0 + \zeta_x \phi_1) E d\zeta_z$$

となり、

$$\begin{aligned}
&\left(\phi_0 + 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_x \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_y \int_{-\infty}^0 \zeta_z \phi_0 E d\zeta_z \right) X + \zeta_x \phi_1 - 2\zeta_x U \\
&\quad + 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_x \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_y \int_{-\infty}^0 \zeta_z \zeta_x \phi_1 E d\zeta_z = 0
\end{aligned} \quad (4.38)$$

となる。式 (4.38) が恒等的に成立するには X の 1 次および 0 次の項がそれぞれゼロになる必要がある。すなわち $Z = 0$ における ϕ_0, ϕ_1 に対する条件

$$\phi_0 = -2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_x \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_y \int_{-\infty}^0 \zeta_z \phi_0 E d\zeta_z \quad (4.39)$$

$$\zeta_x \phi_1 = 2\zeta_x U - 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_x \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_y \int_{-\infty}^0 \zeta_z \zeta_x \phi_1 E d\zeta_z \quad (4.40)$$

を得る。

式 (4.35) と同様にして $\phi_0 = \beta = \text{const.}$ は式 (4.39) を満足する。式 (4.40) の右辺第 2 項の積分は式 (4.36) の右辺の積分と同様にゼロになり、 $Z = 0$ における ϕ_1 に対する境界条件は

$$\phi_1 |_{Z=0} = 2U \quad (\zeta_z > 0) \quad (4.41)$$

となる。

以上より $\phi_1(Z, \zeta_z, \zeta^2)$ に対する微積分方程式 (4.32) を境界条件 (4.37), (4.41) の下に解けば良いことになる。求められた解 ϕ_1 を式 (4.29) に代入すれば、 X 方向に密度勾配 (圧力勾

配)βがあり下面がX方向速度Uで移動する場合のすきま内の気体のX方向流速のZ方向分布が得られることになる。この分布をZ方向にすきま幅にわたって積分すれば、すきま内のX方向流れの流量が求まる。

式(4.32)を以下のように書き換える。

$$\frac{d\phi_1}{dZ} + \frac{1}{k_0\zeta_Z}\phi_1 = \frac{2}{k_0\zeta_Z}V_X - \frac{\beta}{\zeta_Z} \quad (4.42)$$

ここで ϕ_1 が空間変数に関してはZのみの関数であることから偏微分記号 $\partial/\partial Z$ を微分記号 d/dZ に書き換えた。また式(4.33)より ϕ_0 を β に書き換えた。

式(4.42)右辺の V_X は式(4.29)のように ϕ_1 を含む積分で表されるため式(4.42)は ϕ_1 に関する微積分方程式となるが、当面 V_X はZの既知関数と考え、式(4.42)を ϕ_1 に関する常微分方程式として扱う。

式(4.42)の右辺をゼロと置いた方程式の解、すなわち方程式(4.42)の同次解 ϕ_{1H} は

$$\phi_{1H} = C_1 \exp\left(-\frac{Z}{k_0\zeta_Z}\right) \quad (4.43)$$

となる。 C_1 は境界条件により決定される任意定数である。

次に方程式(4.42)の特解を定数変化法により求める。

$$\phi_{1P} = f(Z) \exp\left(-\frac{Z}{k_0\zeta_Z}\right) \quad (4.44)$$

と置き式(4.42)に代入すれば

$$\frac{df}{dZ} \exp\left(-\frac{Z}{k_0\zeta_Z}\right) - \frac{1}{k_0\zeta_Z} f \exp\left(-\frac{Z}{k_0\zeta_Z}\right) + \frac{1}{k_0\zeta_Z} f \exp\left(-\frac{Z}{k_0\zeta_Z}\right) = \frac{2}{k_0\zeta_Z} V_X - \frac{\beta}{\zeta_Z}$$

となり

$$\frac{df}{dZ} = \frac{1}{\zeta_Z} \left(\frac{2V_X}{k_0} - \beta \right) \exp\left(\frac{Z}{k_0\zeta_Z}\right) \quad (4.45)$$

を得る。 f は式(4.45)を積分して

$$f(Z) = \frac{1}{\zeta_Z} \int_a^Z \left(\frac{2V_X(Z')}{k_0} - \beta \right) \exp\left(\frac{Z'}{k_0\zeta_Z}\right) dZ' \quad (4.46)$$

と求められ、積分の下限 a は境界条件から決定される。

式(4.43), (4.46)より一般解

$$\phi_1 = \phi_{1H} + \phi_{1P} = C_1 \exp\left(-\frac{Z}{k_0\zeta_Z}\right) + \frac{1}{\zeta_Z} \exp\left(-\frac{Z}{k_0\zeta_Z}\right) \int_a^Z \left(\frac{2V_X(Z')}{k_0} - \beta \right) \exp\left(\frac{Z'}{k_0\zeta_Z}\right) dZ' \quad (4.47)$$

を得る。

一般解を表す式 (4.47) には ζ_Z がパラメータとして含まれており、 $\zeta_Z > 0$ の解に対しては境界条件 (4.41) が課せられ、 $\zeta_Z < 0$ の解に対しては境界条件 (4.34) が課せられる。これにより C_1, a が決定される。

$\zeta_Z > 0$ の場合には式 (4.41) より $Z = 0$ で $\phi_1 = 2U$ の条件が課せられる。この条件は $a = 0, C_1 = 2U$ とすることにより満足される。

また、 $\zeta_Z < 0$ の場合には式 (4.37) より $Z = H$ で $\phi_1 = 0$ の条件が課せられる。この条件は $a = 1, C_1 = 0$ とすることにより満足される。以上より (微分) 方程式 (4.42) の解として

$$\phi_1 |_{\zeta_Z > 0} = 2U \exp\left(-\frac{Z}{k_0 \zeta_Z}\right) + \frac{1}{\zeta_Z} \exp\left(-\frac{Z}{k_0 \zeta_Z}\right) \int_0^Z \left(\frac{2V_X(Z')}{k_0} - \beta\right) \exp\left(\frac{Z'}{k_0 \zeta_Z}\right) dZ' \quad (4.48)$$

$$\phi_1 |_{\zeta_Z < 0} = \frac{1}{\zeta_Z} \exp\left(-\frac{Z}{k_0 \zeta_Z}\right) \int_H^Z \left(\frac{2V_X(Z')}{k_0} - \beta\right) \exp\left(\frac{Z'}{k_0 \zeta_Z}\right) dZ' \quad (4.49)$$

を得る。上式の V_X に式 (4.29) を代入すれば ϕ_1 に関する積分方程式が得られるが、解法の容易さと現在の問題における興味の対象が速度分布関数よりも流速にあることから、逆に式 (4.48), (4.49) の ϕ_1 を式 (4.29) に代入して V_X に関する積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} V_X &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_X^2 \phi_1 E d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \zeta_X^2 \phi_1 E d\zeta_Z \right] d\zeta_X d\zeta_Y + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^0 \zeta_X^2 \phi_1 E d\zeta_Z \right] d\zeta_X d\zeta_Y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \zeta_X^2 E \left[2U \exp\left(-\frac{Z}{k_0 \zeta_Z}\right) + \frac{1}{\zeta_Z} \exp\left(-\frac{Z}{k_0 \zeta_Z}\right) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^Z \left\{ \frac{2V_X(Z')}{k_0} - \beta \right\} \exp\left(\frac{Z'}{k_0 \zeta_Z}\right) dZ' \right] d\zeta_Z d\zeta_X d\zeta_Y \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 \zeta_X^2 E \left[\frac{1}{\zeta_Z} \exp\left(-\frac{Z}{k_0 \zeta_Z}\right) \int_H^Z \left\{ \frac{2V_X(Z')}{k_0} - \beta \right\} \exp\left(\frac{Z'}{k_0 \zeta_Z}\right) dZ' \right] d\zeta_Z d\zeta_X d\zeta_Y \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned} \quad (4.50)$$

ここで I_1, I_2, I_3 はそれぞれ右辺 1, 2, 3 項の積分を表し、 I_1 は

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \zeta_X^2 E 2U \exp\left(-\frac{Z}{k_0 \zeta_Z}\right) d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z \\ &= \frac{2U}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_X^2 \exp(-\zeta_X^2) d\zeta_X \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\zeta_Y^2) d\zeta_Y \int_0^{\infty} \exp(-\zeta_Z^2) \exp\left(-\frac{Z}{k_0 \zeta_Z}\right) d\zeta_Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2U}{\pi^{3/2}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) (\sqrt{\pi}) \int_0^\infty \exp \left(-\zeta_Z^2 - \frac{Z/k_0}{\zeta_Z} \right) d\zeta_Z \\
&= \frac{U}{\pi^{1/2}} T_0 \left(\frac{Z}{k_0} \right) \tag{4.51}
\end{aligned}$$

となる。ここで関数 T_0 は

$$T_n(x) = \int_0^\infty \tau^n \exp \left(-\tau^2 - \frac{x}{\tau} \right) d\tau \tag{4.52}$$

で定義される関数で $n = 0$ としたものである。 I_2 は

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \zeta_X^2 E \left[\frac{1}{\zeta_Z} \exp \left(-\frac{Z}{k_0 \zeta_Z} \right) \int_0^Z \left\{ \frac{2V_X(Z')}{k_0} - \beta \right\} \exp \left(\frac{Z'}{k_0 \zeta_Z} \right) dZ' \right] d\zeta_Z d\zeta_X d\zeta_Y \\
&= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \frac{\zeta_X^2 E}{\zeta_Z} \left[\int_0^Z \left\{ \frac{2V_X(Z')}{k_0} - \beta \right\} \exp \left(\frac{Z' - Z}{k_0 \zeta_Z} \right) dZ' \right] d\zeta_Z d\zeta_X d\zeta_Y
\end{aligned}$$

となる。ここで $Z > Z'$ であるから $Z' - Z = -|Z - Z'|$ となり

$$I_2 = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \frac{\zeta_X^2 E}{\zeta_Z} \left[\int_0^Z \left\{ \frac{2V_X(z')}{k_0} - \beta \right\} \exp \left(-\frac{|Z - Z'|}{k_0 \zeta_Z} \right) dZ' \right] d\zeta_Z d\zeta_X d\zeta_Y \tag{4.53}$$

となる。 I_3 は

$$I_3 = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^0 \zeta_X^2 E \left[\frac{1}{\zeta_Z} \exp \left(-\frac{Z}{k_0 \zeta_Z} \right) \int_H^Z \left\{ \frac{2V_X(Z')}{k_0} - \beta \right\} \exp \left(\frac{Z'}{k_0 \zeta_Z} \right) dZ' \right] d\zeta_Z d\zeta_X d\zeta_Y$$

ζ_Z を $-\zeta_Z$ と変数変換して

$$I_3 = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \frac{\zeta_X^2 E}{(-\zeta_Z)} \left[\int_H^Z \left\{ \frac{2V_X(z')}{k_0} - \beta \right\} \exp \left(\frac{Z - Z'}{k_0 \zeta_Z} \right) dZ' \right] (-d\zeta_Z) d\zeta_X d\zeta_Y$$

となり、ここで $Z' > Z$ であるから $Z - Z' = -|Z - Z'|$ となり

$$I_3 = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \frac{\zeta_X^2 E}{\zeta_Z} \left[\int_Z^H \left\{ \frac{2V_X(Z')}{k_0} - \beta \right\} \exp \left(-\frac{|Z - Z'|}{k_0 \zeta_Z} \right) dZ' \right] d\zeta_Z d\zeta_X d\zeta_Y$$

となる。式 (4.52), (4.53) より

$$\begin{aligned}
&I_2 + I_3 \\
&= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \frac{\zeta_X^2 E}{\zeta_Z} \left[\int_0^H \left\{ \frac{2V_X(Z')}{k_0} - \beta \right\} \exp \left(-\frac{|Z - Z'|}{k_0 \zeta_Z} \right) dZ' \right] d\zeta_Z d\zeta_X d\zeta_Y \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^\infty \zeta_X^2 \exp(-\zeta_X^2) d\zeta_X \int_{-\infty}^\infty \exp(\zeta_Y^2) d\zeta_Y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^H \left[\left\{ \frac{2V_X(Z')}{k_0} - \beta \right\} \int_0^\infty \frac{1}{\zeta_Z} \exp \left(-\zeta_Z^2 - \frac{|Z-Z'|}{k_0\zeta_Z} \right) d\zeta_Z \right] dZ' \\
& = \frac{1}{\pi^{3/2}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) (\sqrt{\pi}) \int_0^H T_{-1} \left(\frac{|Z-Z'|}{k_0} \right) \left\{ \frac{2V_X(Z')}{k_0} - \beta \right\} dZ' \\
& = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^H T_{-1} \left(\frac{|Z-Z'|}{k_0} \right) \left\{ \frac{V_X(Z')}{k_0} - \frac{\beta}{2} \right\} dZ' \tag{4.54}
\end{aligned}$$

上式と I_1 に対する式 (4.51) より

$$V_X = I_1 + I_2 + I_3$$

$$V_X(Z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[UT_0 \left(\frac{Z}{k_0} \right) + \frac{1}{k_0} \int_0^H T_{-1} \left(\frac{|Z-Z'|}{k_0} \right) \left\{ V_X(Z') - \frac{k_0\beta}{2} \right\} dZ' \right] \tag{4.55}$$

なる X 方向流速 Z の方向分布 $V_X(Z)$ に関する積分方程式を得る。この線形積分方程式の非斉次項である右辺 [] 内の第 1 項, 第 3 項はそれぞれ U, β を因子として含むので、方程式の解 V_X も U, β を因子として含む項の和として表される。これを解法の都合を考えて

$$V_X(Z) = \frac{k_0\beta}{2}(1 - \psi_P) + \psi_C \tag{4.56}$$

と表す。式 (4.56) を式 (4.55) に代入すれば

$$\begin{aligned}
\frac{k_0\beta}{2}(1 - \psi_P) + \psi_C & = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[UT_0 \left(\frac{Z}{k_0} \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{k_0} \int_0^H T_{-1} \left(\frac{|Z-Z'|}{k_0} \right) \left\{ \frac{k_0\beta}{2}(1 - \psi_P) + \psi_C - \frac{k_0\beta}{2} \right\} dZ' \right]
\end{aligned}$$

全ての項を左辺に移して

$$\begin{aligned}
& \frac{k_0\beta}{2} \left[1 - \psi_P + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{k_0} \int_0^H T_{-1} \left(\frac{|Z-Z'|}{k_0} \right) \psi_P dZ' \right] \\
& + \left[\psi_C - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ UT_0 \left(\frac{Z}{k_0} \right) + \frac{1}{k_0} \int_0^H T_{-1} \left(\frac{|Z-Z'|}{k_0} \right) \psi_C dZ' \right\} \right] = 0 \tag{4.57}
\end{aligned}$$

ここで U と β は独立に指定される量であるため、式 (4.57) の 2 つの項はそれぞれゼロでなければならない。これより ψ_P, ψ_C に対する積分方程式

$$\psi_P(Z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}k_0} \int_0^H T_{-1} \left(\frac{|Z-Z'|}{k_0} \right) \psi_P(Z') dZ' \tag{4.58}$$

$$\psi_C(Z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[UT_0 \left(\frac{Z}{k_0} \right) + \frac{1}{k_0} \int_0^H T_{-1} \left(\frac{|Z-Z'|}{k_0} \right) \psi_C(Z') dZ' \right] \tag{4.59}$$

を得る。式 (4.56) において密度勾配 (圧力勾配) β を含む項はポアズイユ流による流速 V_P を表し、壁面速度 U を含む項はクエット流による流速 V_C を表す。すなわち

$$V_X(Z) = V_P(Z) + V_C(Z) \quad (4.60)$$

$$V_P(Z) = \frac{k_0\beta}{2}(1 - \psi_P(Z)) \quad (4.61)$$

$$V_C(Z) = \psi_C(Z) \quad (4.62)$$

となる。

4.4 希薄流の流量係数

x 方向質量流量 q_x は高次の項を省略して

$$q_x = \int_0^h \rho u dz = \int_0^h \rho_0(1 + \omega)u dz = \rho_0 \int_0^h u dz \quad (4.63)$$

と表される。

式 (3.6) にならって q_x を流量係数 Q により

$$q_x = -\frac{h^2}{\sqrt{2RT_0}} \frac{\partial p}{\partial x} Q$$

と表し、 u, z をそれぞれ式 (4.11), (4.17) により無次元化すれば、 $H = h/l_0$ として

$$q_x = \rho_0 \int_0^h u dz = \rho_0 \sqrt{2RT_0} l_0 \int_0^H V_X dZ = -\frac{h^2}{\sqrt{2RT_0}} \frac{\partial p}{\partial x} Q$$

より、 Q は

$$Q = -\frac{\rho_0 l_0 2RT_0}{h^2 \partial p / \partial x} \int_0^H V_X dZ$$

となる。

ここで、 $p = \rho RT = \rho_0(1 + \omega)RT_0(1 + \tau) = \rho_0 RT_0 \omega$ および $\partial / \partial x = (1/l_0) \partial / \partial X$ より、

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\rho_0 RT_0}{l_0} \frac{\partial \omega}{\partial X} = \frac{\rho_0 RT_0 \beta}{l_0}$$

となり、流量係数 Q は

$$Q = -\frac{2l_0^2 \rho_0 RT_0}{h^2 \rho_0 RT_0 \beta} \int_0^H V_X dZ = -\frac{2}{H^2 \beta} \int_0^H V_X dZ \quad (4.64)$$

と表される。

この式 (4.64) に式 (4.61) を代入すれば、ポアズイユ流の流量係数 Q_P は

$$Q_P = -\frac{2}{H^2 \beta} \int_0^H \frac{k_0 \beta}{2} (1 - \psi_P(Z)) dZ = -\frac{k_0}{H^2} \int_0^H (1 - \psi_P(Z)) dZ \quad (4.65)$$

と表される。すなわち、積分方程式 (4.58) の解 $\psi_P(Z)$ が求めれば流量係数 Q_P が求まることになる。

この段階で今まで未定であった衝突頻度 $\rho_0 A_{col}$ と長さの無次元化の基準長 l_0 を定め、積分方程式中の k_0 を確定する。衝突頻度 $\rho_0 A_{col}$ は文献 [1,2] によれば、静止平衡状態における分子の平均自由行程 λ_0 により

$$\rho_0 A_{col} = \frac{\sqrt{2RT_0}}{(2/\sqrt{\pi})\lambda_0} \quad (4.66)$$

とされ、基準長 l_0 は、

$$l_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\lambda_0 \quad (4.67)$$

とされている。

式 (4.66),(4.67) により k_0 は

$$k_0 = \frac{\sqrt{2RT_0}}{l_0 \rho_0 A_{col}} = \frac{\sqrt{2RT_0}}{(2/\sqrt{\pi})\lambda_0} \frac{(2/\sqrt{\pi})\lambda_0}{\sqrt{2RT_0}} = 1 \quad (4.68)$$

となり、また H は

$$H = \frac{h}{l_0} = \frac{h}{(2/\sqrt{\pi})\lambda_0} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{(\lambda_0/h)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2K_{n0}} \equiv D_0 \quad (4.69)$$

となる。ここで、 K_{n0} はすきま幅 h を代表長とするクヌーセン数である。式 (4.69) は式 (3.11) の D の定義式と同じ形をしているので D_0 とおいた。現在の問題の静止平衡状態 (添字 0 の付いた状態) を第 2 章における微小すきまの幅 h の部分の状態と考えれば式 (4.69) 中の添字 0 がとれて

$$H = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\lambda/h} = \frac{\sqrt{\pi}}{2K_n} = D \quad (4.70)$$

となる。式 (4.68),(4.70) によれば式 (4.65) は

$$Q_P(D) = -\frac{1}{D^2} \int_0^D (1 - \psi_P(Z)) dZ = -\frac{1}{D} + \frac{1}{D^2} \int_0^D \psi_P(Z) dZ \quad (4.71)$$

となり、 ψ_P に対する積分方程式 (4.58) は

$$\psi_P(Z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^D T_{-1}(|Z - Z'|) \psi_P(Z') dZ' \quad (4.72)$$

となる。

この無限平行 2 平板間の定常ポアズイユ流れの流量係数 $Q_P(D)$ は、文献 [1] において数値的に求められ、下記の数式にまとめられている。

$$\begin{aligned}Q_P(D) &= \frac{D}{6} + 1.0162 + \frac{1.0653}{D} - \frac{2.1354}{D^2} && (5 \leq D) \\Q_P(D) &= 0.13852D + 1.25087 + \frac{0.15653}{D} - \frac{0.00969}{D^2} && (0.15 \leq D < 5) \\Q_P(D) &= -2.22919D + 2.10673 + \frac{0.01653}{D} - \frac{0.0000694}{D^2} && (0.01 \leq D < 0.15)\end{aligned}\tag{4.73}$$

クエット流による流量も同様にして式 (4.59) の積分方程式の数値解を数値積分して求められるが、上下壁面における境界条件が同一である場合は、流れの対称性から直ちに

$$q_C = \frac{\rho U h}{2}\tag{4.74}$$

が得られる。

● 参考文献

- [1]Fukui,S. and Kaneko,R. : A Database for Interpolation of Poiseuille Flow Rates for High Knudsen Number Lubriaction Problems, ASME Journal of Tribology Vol.112(1990),pp.78-83.
- [2]Cercignani,C. and Daneri,A. : Flow of a Rarefied Gas between Two Parallel Plates, Journal of Applied Physics Vol.34(1963),pp.3509-3513.
- [3] 福井茂寿 : 分子気体力学に基づく薄膜気体潤滑理論とその応用, *ながれ* Vol.7(1988),pp.321-335.

付録 A. 運動する曲面の法線方向速度

時間の経過と共に運動する曲面の方程式が陰関数表示で

$$\phi(x, y, z, t) = 0 \quad (\text{A.1})$$

と表されているとする。時刻 t における曲面上の点 $P = (x, y, z)$ は微小時間 dt 経過後は曲面の運動により点 $P' = (x + udt, y + vdt, z + wdt)$ に移動するものとする。ここで (u, v, w) は点 P の速度ベクトルである。

式 (A.1) で表される曲面の単位法線ベクトル \mathbf{n} は

$$\mathbf{n} = \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2}} \quad (\text{A.2})$$

であるから、曲面上の点 P の移動速度の曲面の法線方向成分 v_n すなわち曲面の法線方向速度 v_n は

$$v_n = (u, v, w) \cdot \mathbf{n} = \frac{u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2}} \quad (\text{A.3})$$

となる。

移動後の点 P' も曲面上にあるから

$$\phi(x + udt, y + vdt, z + wdt, t + dt) = 0$$

が満足される。この式を dt に関して展開し、2 次以上の項を無視すれば

$$\phi(x, y, z, t) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} u + \frac{\partial \phi}{\partial y} v + \frac{\partial \phi}{\partial z} w + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dt = 0$$

となり、第一項は式 (A.1) よりゼロとなることから

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.4})$$

を得る。式 (A.4) を式 (A.3) に代入すれば、曲面の法線方向速度

$$v_n = - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2}} \quad (\text{A.5})$$

を得る。特に曲面の方程式が z について解かれた形

$$z = h(x, y, t) \quad (\text{A.6})$$

になっている場合には、 ϕ を

$$\phi = h(x, y, t) - z = 0 \quad (\text{A.7})$$

として

$$v_n = -\frac{\frac{\partial h}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (\text{A.8})$$

を得る。

付録 B. BGK モデル方程式とその線形化

• BGK モデル方程式

BGK モデル方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_x \frac{\partial f}{\partial x} + c_y \frac{\partial f}{\partial y} + c_z \frac{\partial f}{\partial z} = \rho A_{col} (f_e - f) \quad (\text{B.1})$$

と書かれる。ここで f は速度分布関数、 x, y, z は空間直交座標、 t は時間、 c_x, c_y, c_z は分子速度の x, y, z 成分、 ρ は密度である。 A_{col} は問題に応じて決定される定数で、 ρA_{col} は気体分子の衝突頻度を表す。 f_e は下式で示される局所マックスウェル分布関数である。

$$f_e = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{(c_x - u)^2 + (c_y - v)^2 + (c_z - w)^2}{2RT} \right\} \quad (\text{B.2})$$

式中の密度 ρ は

$$\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f dc_x dc_y dc_z, \quad (\text{B.3})$$

気体速度の x, y, z 成分 u, v, w は

$$u = \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_x f dc_x dc_y dc_z, \quad (\text{B.4})$$

$$v = \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_y f dc_x dc_y dc_z, \quad (\text{B.5})$$

$$w = \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_z f dc_x dc_y dc_z, \quad (\text{B.6})$$

温度 T は

$$T = \frac{1}{3R\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (c_x - u)^2 + (c_y - v)^2 + (c_z - w)^2 \right\} f dc_x dc_y dc_z, \quad (\text{B.7})$$

で定義される。 R は単位質量当り気体定数である。速度分布関数 f は $c_x, c_y, c_z, x, y, z, t$ の関数であるから、 ρ, u, v, w, T は x, y, z, t の関数となる。

式 (B.1) 右辺 f_e 中の ρ, u, v, w, T が式 (B.3)~(B.7) のように f を被積分関数に含む積分で表示されるため BGK モデル方程式 (B.1) は非線形の微積分方程式となる。

• 線形化

速度分布関数 f を静止平衡状態の速度分布関数 f_0 と f_0 からのずれ $f_0\phi$ との和として

$$f = f_0(1 + \phi) \quad (\text{B.8})$$

と表す。このとき、系が静止平衡状態に近ければ ϕ は微小量となる。

この f を式 (B.1) に代入し、 ϕ の 2 次以上の項を省略すれば線形化された BGK モデル方程式が得られる。

f_0 は式 (B.2) において $u = v = w = 0, \rho = \rho_0, T = T_0$ として得られ

$$f_0 = \frac{\rho_0}{(2\pi RT_0)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2RT_0}\right) \quad (\text{B.9})$$

と表される。 ρ_0, T_0 はそれぞれ静止平衡状態の密度, 温度である。

• 左辺第 1 項

式 (B.1) の左辺第 1 項に式 (B.8) で表される f を代入し、 f_0 が時間 t に依存しないことを考慮して

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_0 \phi}{\partial t} = f_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (\text{B.10})$$

を得る。

• 左辺 2,3,4 項

式 (B.1) の左辺 2,3,4 項に式 (B.8) で表される f を代入し、 f_0 が空間座標 x, y, z に依存しないことを考慮して

$$\begin{aligned} c_x \frac{\partial f}{\partial x} + c_y \frac{\partial f}{\partial y} + c_z \frac{\partial f}{\partial z} &= c_x \frac{\partial f_0}{\partial x} + c_y \frac{\partial f_0}{\partial y} + c_z \frac{\partial f_0}{\partial z} + c_x \frac{\partial f_0 \phi}{\partial x} + c_y \frac{\partial f_0 \phi}{\partial y} + c_z \frac{\partial f_0 \phi}{\partial z} \\ &= f_0 \left(c_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + c_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + c_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

を得る。

• 右辺第 1 項の因子 f_e

局所マックスウェル分布 f_e に含まれるパラメータ ρ, u, v, w, T をまず線形化する。 ρ の定義式 (B.3) に式 (B.8) の f を代入すれば

$$\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f dc_x dc_y dc_z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_0 dc_x dc_y dc_z + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_0 \phi dc_x dc_y dc_z$$

となり、ここで

$$\omega = \frac{1}{\rho_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_0 \phi dc_x dc_y dc_z \quad (\text{B.12})$$

とおけば

$$\rho = \rho_0(1 + \omega) \quad (\text{B.13})$$

となる。 ω は密度の摂動分を表し、 $\omega = O(\phi)$ である。

u の定義式 (B.4) に式 (B.8) の f を代入すれば

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_x f dc_x dc_y dc_z \\
&= \frac{1}{\rho_0(1+\omega)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_x f_0 dc_x dc_y dc_z + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_x f_0 \phi dc_x dc_y dc_z \right].
\end{aligned}$$

ここで

$$\frac{1}{\rho_0(1+\omega)} = \frac{1}{\rho_0} \{1 - \omega + O(\phi^2)\} = \frac{1-\omega}{\rho_0} + O(\phi^2)$$

であることと、右辺 [] 内の第 1 項の積分がゼロ、第 2 項の積分の大きさが、 $O(\phi)$ であることから

$$u = \frac{1}{\rho_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_x f_0 \phi dc_x dc_y dc_z + O(\phi^2) \quad (\text{B.14})$$

を得る。同様にして

$$v = \frac{1}{\rho_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_y f_0 \phi dc_x dc_y dc_z + O(\phi^2) \quad (\text{B.15})$$

$$w = \frac{1}{\rho_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_z f_0 \phi dc_x dc_y dc_z + O(\phi^2) \quad (\text{B.16})$$

を得る。 u, v, w の大きさは $O(\phi)$ である。式 (B.7) は

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{3R\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{(c_x - u)^2 + (c_y - v)^2 + (c_z - w)^2\} f dc_x dc_y dc_z \\
&= \frac{1}{3R} \frac{1}{\rho_0(1+\omega)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{(c_x - u)^2 + (c_y - v)^2 + (c_z - w)^2\} f_0 dc_x dc_y dc_z \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{(c_x - u)^2 + (c_y - v)^2 + (c_z - w)^2\} f_0 \phi dc_x dc_y dc_z \right]
\end{aligned}$$

となり、[] 内第 1 の積分を I_1 とおけば

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) f_0 dc_x dc_y dc_z - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (c_x u + c_y v + c_z w) f_0 dc_x dc_y dc_z \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + v^2 + w^2) f_0 dc_x dc_y dc_z
\end{aligned}$$

となる。ここで第 2 項の積分はゼロ、第 3 項の積分は $O(\phi^2)$ となることより、

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) f_0 dc_x dc_y dc_z + O(\phi^2)$$

となる。被積分関数の対称性を考慮すれば

$$I_1 = 3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_x^2 f_0 dc_x dc_y dc_z + O(\phi^2)$$

としてよい。式 (B.9) の f_0 を代入すれば、

$$\begin{aligned} I_1 &= 3 \frac{\rho_0}{(2\pi RT_0)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} c_x^2 \exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_0}\right) dc_x \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{c_y^2}{2RT_0}\right) dc_y \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{c_z^2}{2RT_0}\right) dc_z + O(\phi^2) \\ &= 3 \frac{\rho_0}{(2\pi RT_0)^{3/2}} \left\{ 2 \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{2} (2RT_0)^{3/2} \right\} \left\{ 2 \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2RT_0)^{1/2} \right\}^2 + O(\phi^2) \\ &= \frac{3\rho_0}{\pi^{3/2} (2RT_0)^{3/2}} \frac{\pi^{3/2} (2RT_0)^{5/2}}{2} = 3RT_0\rho_0 + O(\phi^2) \end{aligned}$$

[] 内の第 2 の積分を I_2 とおけば

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) f_0 \phi dc_x dc_y dc_z \\ &\quad - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (c_x u + c_y v + c_z w) f_0 \phi dc_x dc_y dc_z + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + v^2 + w^2) f_0 \phi dc_x dc_y dc_z \end{aligned}$$

となる。第 2 項の積分の大きさは $O(\phi^2)$ 、第 3 項の積分の大きさは $O(\phi^3)$ であるので

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) f_0 \phi dc_x dc_y dc_z + O(\phi^2)$$

となる。 I_2 の大きさは $O(\phi)$ である。以上より

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{3R\rho_0(1+\omega)} (I_1 + I_2) \\ &= \frac{1}{3R\rho_0} (1-\omega)(3RT_0\rho_0 + I_2) + O(\phi^2) \\ &= \frac{1}{3R\rho_0} (3RT_0\rho_0 + I_2 - 3RT_0\rho_0\omega) + O(\phi^2) \\ &= T_0 + \frac{1}{3R\rho_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) f_0 \phi dc_x dc_y dc_z - \omega T_0 + O(\phi^2) \\ &= T_0 \left\{ 1 + \frac{1}{3R\rho_0 T_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) f_0 \phi dc_x dc_y dc_z - \omega \right\} + O(\phi^2) \end{aligned}$$

ここで

$$\tau = \frac{1}{3R\rho_0 T_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) f_0 \phi dc_x dc_y dc_z - \omega \quad (\text{B.17})$$

とおけば

$$T = T_0(1 + \tau) \quad (\text{B.18})$$

となる。 τ は温度の摂動分を表し大きさは $O(\phi)$ である。関数 f_e の因子 $\rho/(2\pi RT)^{3/2}$ の部分は、以下の様に線形化される。

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}} &= \frac{\rho_0(1 + \omega)}{(2\pi R)^{3/2} T_0^{3/2} (1 + \tau)^{3/2}} = \frac{\rho_0}{(2\pi RT_0)^{3/2}} (1 + \omega) \left\{ 1 - \frac{3}{2}\tau + O(\phi^2) \right\} \\ &= \frac{\rho_0}{(2\pi RT_0)^{3/2}} \left\{ 1 + \omega - \frac{3}{2}\tau + O(\phi^2) \right\} \end{aligned}$$

関数 f_e の指数関数の部分は

$$\begin{aligned} &\exp \left\{ -\frac{(c_x - u)^2 + (c_y - v)^2 + (c_z - w)^2}{2RT} \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 - 2(c_x u + c_y v + c_z w) + u^2 + v^2 + w^2}{2RT_0(1 + \tau)} \right\} \\ &= \exp \left[-\frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 - 2(c_x u + c_y v + c_z w) + O(\phi^2)}{2RT_0} \left\{ 1 - \tau + O(\phi^2) \right\} \right] \\ &= \exp \left[-\frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 - 2(c_x u + c_y v + c_z w)}{2RT_0} + \frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2RT_0} \tau + O(\phi^2) \right] \\ &= \exp \left(-\frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2RT_0} \right) \exp \left(\frac{c_x u + c_y v + c_z w}{RT_0} \right) \exp \left(\frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2RT_0} \tau \right) \exp \{ O(\phi^2) \} \\ &= \exp \left(-\frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2RT_0} \right) \left\{ 1 + \frac{c_x u + c_y v + c_z w}{RT_0} + O(\phi^2) \right\} \left\{ 1 + \frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2RT_0} \tau + O(\phi^2) \right\} \\ &\quad \times \left\{ 1 + O(\phi^2) \right\} \\ &= \exp \left(-\frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2RT_0} \right) \left\{ 1 + \frac{c_x u + c_y v + c_z w}{RT_0} + \frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2RT_0} \tau + O(\phi^2) \right\} \end{aligned}$$

と線形化される。以上より

$$\begin{aligned}
f_e &= \frac{\rho_0}{(2\pi RT_0)^{3/2}} \left\{ 1 + \omega - \frac{3}{2}\tau + O(\phi^2) \right\} \exp\left(-\frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2RT_0}\right) \\
&\quad \times \left\{ 1 + \frac{c_x u + c_y v + c_z w}{RT_0} + \frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2RT_0}\tau + O(\phi^2) \right\} \\
&= f_0 \left\{ 1 + \omega + \left(\frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2RT_0} - \frac{3}{2} \right) \tau + \frac{c_x u + c_y v + c_z w}{RT_0} + O(\phi^2) \right\} \tag{B.19}
\end{aligned}$$

と線形化される。したがって式 (B.1) の右辺は、 $O(\phi^2)$ の項を無視すれば

$$\begin{aligned}
&\rho A_{col}(f_e - f) \\
&= A_{col}\rho_0(1 + \omega) \left[f_0 \left\{ 1 + \omega + \left(\frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2RT_0} - \frac{3}{2} \right) \tau + \frac{c_x u + c_y v + c_z w}{RT_0} \right\} - f_0(1 + \phi) \right] \\
&= A_{col}\rho_0(1 + \omega)f_0 \left[\omega + \left(\frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2RT_0} - \frac{3}{2} \right) \tau + \frac{c_x u + c_y v + c_z w}{RT_0} - \phi \right] \\
&= \rho_0 A_{col} f_0 \left\{ \omega + \left(\frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2RT_0} - \frac{3}{2} \right) \tau + \frac{c_x u + c_y v + c_z w}{RT_0} - \phi \right\} \tag{B.20}
\end{aligned}$$

となる。

● BGK モデル方程式の線形化

式 (B.10), (B.11), (B.20) より式 (B.1) は

$$\begin{aligned}
&f_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + f_0 \left(c_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + c_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + c_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\
&= \rho_0 A_{col} f_0 \left\{ \omega + \left(\frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2RT_0} - \frac{3}{2} \right) \tau + \frac{c_x u + c_y v + c_z w}{RT_0} - \phi \right\}
\end{aligned}$$

と書かれ、 f_0 を両辺から消去して

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + c_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + c_z \frac{\partial \phi}{\partial z} = \rho_0 A_{col} \left\{ -\phi + \omega + \frac{2(c_x u + c_y v + c_z w)}{2RT_0} + \left(\frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2RT_0} - \frac{3}{2} \right) \tau \right\} \tag{B.21}$$

と線形化される。ここで ω, u, v, w, τ は式 (B.14)~(B.17) のように ϕ を 1 次式の形で含む積分によって表されているので、式 (B.21) は ϕ に対する線形の微積分方程式となる。

●線形化 BGK モデル方程式の無次元化

空間座標 x, y, z を基準長 l で、時間 t を基準時間 t_0 で、分子速度 c_x, c_y, c_z および流速 u, v, w を静止平衡状態における分子の最確速度 $\sqrt{2RT_0}$ で無次元化する。

$$X = \frac{x}{l}, \quad Y = \frac{y}{l}, \quad Z = \frac{z}{l}, \quad \hat{T} = \frac{t}{t_0}$$

$$\zeta_X = \frac{c_x}{\sqrt{2RT_0}}, \quad \zeta_Y = \frac{c_y}{\sqrt{2RT_0}}, \quad \zeta_Z = \frac{c_z}{\sqrt{2RT_0}}$$

$$V_X = \frac{u}{\sqrt{2RT_0}}, \quad V_Y = \frac{v}{\sqrt{2RT_0}}, \quad V_Z = \frac{w}{\sqrt{2RT_0}} \quad (\text{B.22})$$

ϕ, ω, τ は既に無次元量であるから、式 (B.21) は

$$\frac{1}{t_0} \frac{\partial \phi}{\partial \hat{T}} + \frac{\sqrt{2RT_0}}{l} \left(\zeta_X \frac{\partial \phi}{\partial X} + \zeta_Y \frac{\partial \phi}{\partial Y} + \zeta_Z \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right)$$

$$= \rho_0 A_{col} \left\{ -\phi + \omega + 2(\zeta_X V_X + \zeta_Y V_Y + \zeta_Z V_Z) + \left(\zeta_X^2 + \zeta_Y^2 + \zeta_Z^2 - \frac{3}{2} \right) \tau \right\}$$

となり、両辺に $l/\sqrt{2RT_0}$ を掛け

$$S = \frac{l}{t_0 \sqrt{2RT_0}} \quad (\text{B.23})$$

$$k_0 = \frac{\sqrt{2RT_0}}{l \rho_0 A_{col}} \quad (\text{B.24})$$

とおけば

$$S \frac{\partial \phi}{\partial \hat{T}} + \zeta_X \frac{\partial \phi}{\partial X} + \zeta_Y \frac{\partial \phi}{\partial Y} + \zeta_Z \frac{\partial \phi}{\partial Z} = \frac{1}{k_0} \left\{ -\phi + \omega + 2(\zeta_X V_X + \zeta_Y V_Y + \zeta_Z V_Z) + \left(\zeta_X^2 + \zeta_Y^2 + \zeta_Z^2 - \frac{3}{2} \right) \tau \right\} \quad (\text{B.25})$$

を得る。 $\omega, \tau, V_X, V_Y, V_Z$ の被積分関数も無次元変数で表せば

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_0}{(2\pi RT_0)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2RT_0} \right\} \phi dc_x dc_y dc_z \\ &= \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi e^{-(\zeta_X^2 + \zeta_Y^2 + \zeta_Z^2)} d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z \end{aligned}$$

ここで

$$E = \frac{1}{\pi^{3/2}} e^{-(\zeta_X^2 + \zeta_Y^2 + \zeta_Z^2)} \quad (\text{B.26})$$

とおけば

$$\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi E d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z \quad (\text{B.27})$$

同様にして

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{3RT_0\rho_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 2RT_0(\zeta_X^2 + \zeta_Y^2 + \zeta_Z^2) \frac{\rho_0}{\pi^{3/2}} e^{-(\zeta_X^2 + \zeta_Y^2 + \zeta_Z^2)} \phi d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi E d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z \\ &= \frac{2}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\zeta_X^2 + \zeta_Y^2 + \zeta_Z^2) \phi E d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi E d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z \\ &= \frac{2}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\zeta_X^2 + \zeta_Y^2 + \zeta_Z^2 - \frac{3}{2}) \phi E d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

$$\begin{aligned} V_X &= \frac{u}{\sqrt{2RT_0}} = \frac{1}{\sqrt{2RT_0}} \frac{1}{\rho_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2RT_0} \zeta_X \frac{\rho_0}{\pi^{3/2}} e^{-(\zeta_X^2 + \zeta_Y^2 + \zeta_Z^2)} \phi d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_X \phi E d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

を得る。同様にして

$$V_Y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_Y \phi E d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z \quad (\text{B.30})$$

$$V_Z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_Z \phi E d\zeta_X d\zeta_Y d\zeta_Z. \quad (\text{B.31})$$

を得る。

●参考文献

日本流体力学会編, 流体力学ハンドブック (1987), pp.309-404, 丸善

付録 C. 速度分布関数 f に対する固体壁境界条件とその線形化

- 固体壁面に衝突した気体分子の挙動

固体壁面に衝突した気体分子の衝突後の挙動は、固体壁面を構成する分子と気体分子との相互作用の内容により決まる。ボルツマン方程式に基づく解析の立場では、この相互作用の詳細に立ち入ることはせず、固体壁面に衝突した分子は直ちに(固体壁面上に滞留することなく)固体壁面から離脱するというモデルが広く用いられる。すなわち、このモデルでは気体分子は固体壁面で反射されることになる。

ここで固体壁面に入射する分子の速度と、反射した分子の速度との関係が問題になる。この関係の指定が速度分布関数 f に対する固体壁境界条件となる。

- 鏡面反射固体壁境界条件

図 C.1 に示すように、静止している固体壁面に入射する分子の入射角 α と反射角 β が等しいような反射を鏡面反射という。

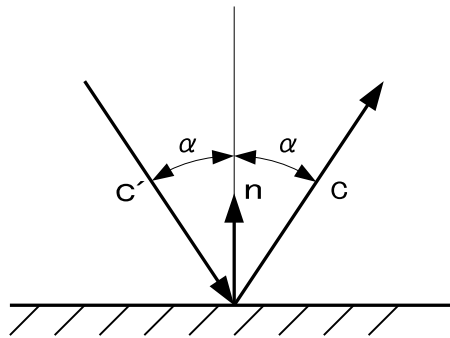


図 C.1 鏡面反射

ここで c' は入射分子速度、 c は反射分子速度、 n は固体壁面上に立てた固体壁面外側を正の向きとする単位法線ベクトルである。反射前後の分子速度のベクトル c' と c の間には幾何学的関係

$$c - c' = 2(c \cdot n)n \quad (\text{C.1})$$

がある。これにより c' を c で表せば

$$c' = c - 2(c \cdot n)n \quad (\text{C.2})$$

となる。従って固体壁面上の点 r に入射する分子の速度分布関数を $f(c', r, t)$ とすれば(この f は $c' \cdot n < 0$ においてのみ定義されている)、反射する分子の速度分布関数 f は

$$f(c, r, t) = f(c - 2(c \cdot n)n, r, t) \quad (c \cdot n > 0) \quad (\text{C.3})$$

となる。これが静止固体壁面における速度分布関数 f に対する鏡面反射境界条件である。固体壁面が速度 \mathbf{v}_{wall} で運動しているときは式 (C.2) における \mathbf{c}' , \mathbf{c} を固体壁面に対する相対速度 $\mathbf{c}' - \mathbf{v}_{wall}$, $\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall}$ で置き換えて

$$\mathbf{c}' = \mathbf{c} - 2[(\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}$$

を得る。これにより、固体壁面が速度 \mathbf{v}_{wall} で運動しているときの鏡面反射条件は

$$f(\mathbf{c}, \mathbf{r}, t) = f(\mathbf{c} - 2[(\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, t) \quad [(\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall}) \cdot \mathbf{n} > 0] \quad (\text{C.4})$$

となる。

- 拡散反射固体壁境界条件

静止している固体壁面に入射した分子の反射後の速度が、入射速度とは無関係に固体壁面温度のマックスウェル分布からサンプリングされた速度になるような反射を拡散反射という。この場合反射分子の速度分布関数は

$$f(\mathbf{c}, \mathbf{r}, t) = \frac{\rho_{wall}}{(2\pi RT_{wall})^{3/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_{wall}}\right) \quad (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} > 0) \quad (\text{C.5})$$

となる。ここで T_{wall} は固体壁面温度、 R は単位質量当り気体定数、 ρ_{wall} は固体壁面における密度で以下のようにして入射分子の速度分布関数と関係付けられる。

固体壁面を通過する流れは無いから、固体壁面における気体の流速ベクトル (u, v, w) と固体壁面の法線ベクトル \mathbf{n} との内積はゼロ

$$(u, v, w) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{C.6})$$

となる。気体の流速ベクトル (u, v, w) は気体分子速度の平均として

$$(u, v, w) = \frac{1}{\rho_{wall}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{c} f dc_x dc_y dc_z$$

と表されるから (付録 B の式 (B.4), (B.5)(B.6) 参照)、式 (C.6) は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} f dc_x dc_y dc_z = 0 \quad (\text{C.7})$$

となる。上式中の積分の積分範囲は全速度空間に渡るが、これを固体壁面上に立てた単位法線ベクトル \mathbf{n} と分子速度ベクトル \mathbf{c} との内積が、正の部分と負の部分に分けて考える。すなわち、反射分子の分子速度に関する部分と、入射分子の分子速度に関する部分に分ける。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} f dc_x dc_y dc_z = \int_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} \geq 0} \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} f dc + \int_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} < 0} \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} f dc$$

上式の右辺第1項の積分の被積分関数の f は式 (C.5) で与えられているから、この積分 I_1 は

$$I_1 = \int_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} \geq 0} \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} f d\mathbf{c} = \frac{\rho_{wall}}{(2\pi RT_{wall})^{3/2}} \int_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} \geq 0} \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} \exp\left(-\frac{c^2}{2RT_{wall}}\right) d\mathbf{c}$$

ここで速度空間 (c_x, c_y, c_z) において、ベクトル \mathbf{n} を極軸とする球極座標 (c, θ, ϕ) を導入すれば

$$c = |\mathbf{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} = c \cos \theta$$

$$d\mathbf{c} = c^2 \sin \theta dc d\theta d\phi$$

となる。これより I_1 は

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\rho_{wall}}{\pi^{3/2} (2RT_{wall})^{3/2}} \int_0^\infty c^3 \exp\left(-\frac{c^2}{2RT_{wall}}\right) dc \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta \int_0^\pi d\phi \\ &= \frac{\rho_{wall}}{\pi^{3/2} (2RT_{wall})^{3/2}} \left\{ \frac{1}{2} (2RT_{wall})^2 \right\} \left(\frac{1}{2} \right) (2\pi) \\ &= \sqrt{\frac{RT_{wall}}{2\pi}} \cdot \rho_{wall} \end{aligned}$$

以上より式 (C.7) は

$$\rho_{wall} \sqrt{\frac{RT_{wall}}{2\pi}} + \int_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} < 0} \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} f d\mathbf{c} = 0$$

となり

$$\rho_{wall} = -\sqrt{\frac{2\pi}{RT_{wall}}} \int_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} < 0} \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} f d\mathbf{c} \quad (\text{C.8})$$

を得る。固体壁境界が速度 \mathbf{v}_{wall} で運動しているときは、固体壁面に対する気体分子の相対運動を考えることにより同様にして

$$f(\mathbf{c}, \mathbf{r}, t) = \frac{\rho_{wall}}{(2\pi RT_{wall})^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall})^2}{2RT_{wall}}\right\} \quad [(\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall}) \cdot \mathbf{n} > 0] \quad (\text{C.9})$$

$$\rho_{wall} = -\sqrt{\frac{2\pi}{RT_{wall}}} \int_{(\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall}) \cdot \mathbf{n} < 0} (\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall}) \cdot \mathbf{n} f d\mathbf{c} \quad (\text{C.10})$$

なる拡散反射固体壁境界条件を得る。

● マックスウェル型固体壁境界条件

α を $0 \leq \alpha \leq 1$ の数値とし、固体壁面に衝突した分子のうち拡散反射するものの確率が α 、鏡面反射するものの確率が $1 - \alpha$ であるような固体壁境界条件をマックスウェル型の固体壁境界条件という。また α を適応係数と呼ぶ。マックスウェル型の固体壁境界条件に

において適応係数 α が $\alpha = 1$ の場合は拡散反射、 $\alpha = 0$ の場合は鏡面反射の固体壁境界条件となる。式で書けば式 (C.4), (C.9), (C.10) より

$$f(\mathbf{c}, \mathbf{r}, t) = (1 - \alpha)f(\mathbf{c} - 2[(\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \mathbf{r}, t) + \alpha \frac{\rho_{wall}}{(2\pi RT_{wall})^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall})^2}{2RT_{wall}}\right\} \quad [(\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall}) \cdot \mathbf{n} > 0] \quad (C.11)$$

$$\rho_{wall} = -\sqrt{\frac{2\pi}{RT_{wall}}} \int_{(\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall}) \cdot \mathbf{n} < 0} (\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall}) \cdot \mathbf{n} f d\mathbf{c} \quad (C.12)$$

となる。

- 境界条件の線形化

速度分布関数 f を付録 B で行ったように静止平衡状態の速度分布関数 f_0 と f_0 に対する摂動 ϕ の和として

$$f = f_0(1 + \phi) \quad (C.13)$$

$$f_0 = \frac{\rho_0}{(2\pi RT_0)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2RT_0}\right) \quad (C.14)$$

のように表せば、 f に対する境界条件は ϕ に対する境界条件になる。ここで T_0, ρ_0 はそれぞれ静止平衡状態の温度および密度である。さらに ϕ の 2 次以上の項を省略すれば、 ϕ に対する線形の境界条件を得る。

- 鏡面反射固体壁境界条件の線形化

まず、簡単のため静止した鏡面反射固体壁面における境界条件式 (C.3) に式 (C.13) で表された f を代入すれば

$$f_0(\mathbf{c})[1 + \phi(\mathbf{c}, \mathbf{r}, t)] = f_0(\mathbf{c} - 2(\mathbf{c} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n})[1 + \phi(\mathbf{c} - 2(\mathbf{c} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, \mathbf{r}, t)] \quad (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} > 0) \quad (C.15)$$

を得る。 $f_0(\mathbf{c})$ は式 (C.14) に示されるように $c^2 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = c^2$ の関数であるから式 (C.15) の右辺の f_0 はその引数の 2 乗 $[\mathbf{c} - 2(\mathbf{c} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}]^2$ の関数である。ここで

$$[\mathbf{c} - 2(\mathbf{c} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}]^2 = c^2 - 4(\mathbf{c} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}) + 4(\mathbf{c} \cdot \mathbf{n})^2 = c^2$$

であるから $f_0(\mathbf{c} - 2(\mathbf{c} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) = f_0(\mathbf{c})$ となり、また、 $f_0(\mathbf{c}) \neq 0$ であるから式 (C.15) の両辺を $f_0(\mathbf{c})$ で割って ϕ に対する境界条件式

$$\phi(\mathbf{c}, \mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{c} - 2(\mathbf{c} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, \mathbf{r}, t) \quad (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} > 0) \quad (C.16)$$

を得る。

固体壁境界が速度 \mathbf{v}_{wall} で運動しているときは

$$\phi(\mathbf{c}, \mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{c} - 2[(\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall}) \cdot \mathbf{n}]\mathbf{n}, \mathbf{r}, t) \quad [(\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall}) \cdot \mathbf{n} > 0] \quad (\text{C.17})$$

となる。

• 拡散反射固体壁境界条件の線形化

速度 \mathbf{v}_{wall} で運動する拡散反射固体壁面における境界条件式 (C.9) に式 (C.13) で表された f を代入する。

$$f_0(\mathbf{c})[1 + \phi(\mathbf{c}, \mathbf{r}, t)] = \frac{\rho_{wall}}{(2\pi RT_{wall})^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall})^2}{2RT_{wall}}\right\} \quad [(\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall}) \cdot \mathbf{n} > 0] \quad (\text{C.18})$$

上式において右辺の因子

$$\frac{1}{(2\pi RT_{wall})^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall})^2}{2RT_{wall}}\right\}$$

を、付録 B の局所マックスウェル分布の線形化と同様にして線形化する。このとき、固体壁温度 T_{wall} は、静止平衡状態の温度 T_0 に対する摂動 τ_{wall} により

$$T_{wall} = T_0(1 + \tau_{wall})$$

表されるとする。ここで

$$\tau_{wall} = \frac{T_{wall}}{T_0} - 1 = O(\phi) \quad (\text{C.19})$$

とする。

また、固体壁面の運動速度 \mathbf{v}_{wall} は、十分小さく $O(\phi)$ の程度であるとする。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi RT_{wall})^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall})^2}{2RT_{wall}}\right\} \\ = & \frac{1}{(2\pi RT_{wall})^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\mathbf{c}^2 - 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{v}_{wall} + O(\phi^2)}{2RT_{wall}}\right\} \\ = & \frac{1}{(2\pi RT_0)^{3/2}} \left(1 - \frac{3}{2}\tau_{wall} + O(\phi^2)\right) \exp\left\{-\frac{1}{2RT_0} \left(1 - \tau_{wall} + O(\phi^2)\right) (\mathbf{c}^2 - 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{v}_{wall} + O(\phi^2))\right\} \\ = & \frac{1}{(2\pi RT_0)^{3/2}} \left(1 - \frac{3}{2}\tau_{wall}\right) \exp\left\{-\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0} + \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{v}_{wall}}{RT_0} + \frac{\mathbf{c}^2 \tau_{wall}}{2RT_0} + O(\phi^2)\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi RT_0)^{3/2}} \left(1 - \frac{3}{2}\tau_{wall}\right) \exp\left(-\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0}\right) \exp\left\{\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{v}_{wall}}{RT_0} + \frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0}\tau_{wall} + O(\phi^2)\right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi RT_0)^{3/2}} \left(1 - \frac{3}{2}\tau_{wall}\right) \exp\left(-\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0}\right) \left\{1 + \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{v}_{wall}}{RT_0} + \frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0}\tau_{wall} + O(\phi^2)\right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi RT_0)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0}\right) \left\{1 + \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{v}_{wall}}{RT_0} + \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0} - \frac{3}{2}\right)\tau_{wall} + O(\phi^2)\right\} \quad (C.20)
\end{aligned}$$

同様に式 (C.5),(C.13) を式 (C.10) に代入して線形化する。

$$\begin{aligned}
\rho_{wall} &= -\sqrt{\frac{2\pi}{RT_0(1+\tau_{wall})}} \int_{(\mathbf{c}-\mathbf{v}_{wall})\cdot\mathbf{n}<0} (\mathbf{c}-\mathbf{v}_{wall})\cdot\mathbf{n} f_0(1+\phi) d\mathbf{c} \\
&= -\sqrt{\frac{2\pi}{RT_0}} (1+\tau_{wall})^{-\frac{1}{2}} \frac{\rho_0}{(2\pi RT_0)^{3/2}} \left[\int_{(\mathbf{c}-\mathbf{v}_{wall})\cdot\mathbf{n}<0} (\mathbf{c}-\mathbf{v}_{wall})\cdot\mathbf{n} \exp\left(-\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0}\right) d\mathbf{c} \right. \\
&\quad \left. + \int_{(\mathbf{c}-\mathbf{v}_{wall})\cdot\mathbf{n}<0} (\mathbf{c}-\mathbf{v}_{wall})\cdot\mathbf{n} \exp\left(-\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0}\right) \phi d\mathbf{c} \right] \\
&= -\frac{\rho_0}{2\pi(RT_0)^2} \left\{1 - \frac{\tau_{wall}}{2} + O(\phi^2)\right\} \left[\int_{(\mathbf{c}-\mathbf{v}_{wall})\cdot\mathbf{n}<0} (\mathbf{c}-\mathbf{v}_{wall})\cdot\mathbf{n} \exp\left(-\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0}\right) d\mathbf{c} \right. \\
&\quad \left. + \int_{(\mathbf{c}-\mathbf{v}_{wall})\cdot\mathbf{n}<0} (\mathbf{c}-\mathbf{v}_{wall})\cdot\mathbf{n} \exp\left(-\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0}\right) \phi d\mathbf{c} \right] \quad (C.21)
\end{aligned}$$

[] 内第一項の積分を J_1 とおき、積分変数を

$$\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall} = \mathbf{p}, \quad d\mathbf{c} = d\mathbf{p}$$

と変換すれば、

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{(\mathbf{c}-\mathbf{v}_{wall})\cdot\mathbf{n}<0} (\mathbf{c}-\mathbf{v}_{wall})\cdot\mathbf{n} \exp\left(-\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0}\right) d\mathbf{c} \\
&= \int_{\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}<0} \mathbf{p}\cdot\mathbf{n} \exp\left\{-\frac{(\mathbf{p}+\mathbf{v}_{wall})^2}{2RT_0}\right\} d\mathbf{p}
\end{aligned}$$

被積分関数中の指数関数は

$$\exp\left(-\frac{p^2 + 2\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}_{wall} + \mathbf{v}_{wall}^2}{2RT_0}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \exp\left(-\frac{p^2}{2RT_0}\right) \exp\left(-\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}_{wall}}{RT_0}\right) \exp\left(-\frac{v_{wall}^2}{2RT_0}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{p^2}{2RT_0}\right) \left\{1 - \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}_{wall}}{RT_0} + O(\phi^2)\right\} \left\{1 + O(\phi^2)\right\} \\
&= \exp\left(-\frac{p^2}{2RT_0}\right) - \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}_{wall}}{RT_0} \exp\left(-\frac{p^2}{2RT_0}\right) + O(\phi^2)
\end{aligned}$$

と近似される。これによれば積分 J_1 は

$$J_1 = \int_{\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}<0} \mathbf{p}\cdot\mathbf{n} \exp\left(-\frac{p^2}{2RT_0}\right) d\mathbf{p} - \frac{1}{RT_0} \int_{\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}<0} (\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}_{wall}) \exp\left(-\frac{p^2}{2RT_0}\right) d\mathbf{p} \quad (\text{C.22})$$

となる。右辺第一項の積分は I_1 を求めたときと全く同様にして

$$\int_{\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}<0} \mathbf{p}\cdot\mathbf{n} \exp\left(-\frac{p^2}{2RT_0}\right) d\mathbf{p} = -2\pi(RT_0)^2 \quad (\text{C.23})$$

となる。式 (C.22) 右辺第 2 項の積分を求めるに当たって以下の座標系を導入する。すなわち、座標原点が固体表面上にあり、 z 軸の方向および正の向きが単位法線の方向および向きと一致し、 x 軸 y 軸が z 軸および互いに直交するようなカーテシアン座標系を導入する。この座標系によれば法線 \mathbf{n} の成分は $(0, 0, 1)$ になり、被積分関数中の $(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}_{wall})$ は、

$$(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}_{wall}) = p_z(p_x v_{wall,x} + p_y v_{wall,y} + p_z v_{wall,z})$$

となる。また、積分範囲は

$$\int_{\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}<0} \cdots d\mathbf{p} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^0 \cdots dp_z \right\} dp_x dp_y$$

となる。これらを用いると右辺第 2 項の積分は

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{RT_0} \int_{\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}<0} (\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}_{wall}) \exp\left(-\frac{p^2}{2RT_0}\right) d\mathbf{p} \\
&= -\frac{1}{RT_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 \left[p_z(p_x v_{wall,x} + p_y v_{wall,y} + p_z v_{wall,z}) \exp\left(-\frac{p^2}{2RT_0}\right) \right] dp_z dp_x dp_y \\
&= -\frac{1}{RT_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 p_z^2 v_{wall,z} \exp\left(-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2RT_0}\right) dp_z dp_x dp_y \\
&= -\frac{v_{wall,z}}{RT_0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{p_x^2}{2RT_0}\right) dp_x \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{p_y^2}{2RT_0}\right) dp_y \int_{-\infty}^0 p_z^2 \exp\left(-\frac{p_z^2}{2RT_0}\right) dp_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{v_{wall,z}}{RT_0} \left\{ \sqrt{\pi} \sqrt{2RT_0} \right\} \left\{ \sqrt{\pi} \sqrt{2RT_0} \right\} \left\{ \frac{1}{4} \sqrt{\pi} (2RT_0)^{3/2} \right\} \\
&= -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{wall}) \pi^{3/2} \sqrt{2} (RT_0)^{3/2}
\end{aligned} \tag{C.24}$$

となる。式 (C.23), (C.24) を式 (C.22) に代入すれば J_1 は

$$J_1 = -2\pi (RT_0)^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{wall}) \sqrt{2} \pi^{3/2} (RT_0)^{3/2} \tag{C.25}$$

となる。この式 (C.25) を式 (C.21) に代入すれば

$$\begin{aligned}
\rho_{wall} &= -\frac{\rho_0}{2\pi (RT_0)^2} \left\{ 1 - \frac{\tau_{wall}}{2} + O(\phi^2) \right\} \left[-2\pi (RT_0)^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{wall}) \sqrt{2} \pi^{3/2} (RT_0)^{3/2} \right. \\
&\quad \left. + \int_{(\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall}) \cdot \mathbf{n} < 0} (\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall}) \cdot \mathbf{n} \exp\left(-\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0}\right) \phi d\mathbf{c} \right] \\
&= \rho_0 \left\{ 1 - \frac{\tau_{wall}}{2} + O(\phi^2) \right\} \left[1 + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2RT_0}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{wall}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2\pi (RT_0)^2} \int_{(\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall}) \cdot \mathbf{n} < 0} (\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall}) \cdot \mathbf{n} \exp\left(-\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0}\right) \phi d\mathbf{c} \right] \\
&= \rho_0 \left[1 + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2RT_0}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{wall}) - \frac{\tau_{wall}}{2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2\pi (RT_0)^2} \int_{(\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall}) \cdot \mathbf{n} < 0} (\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall}) \cdot \mathbf{n} \exp\left(-\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0}\right) \phi d\mathbf{c} \right]
\end{aligned} \tag{C.26}$$

を得る。式 (C.26) と式 (C.19) より式 (C.18) の右辺は

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho_{wall}}{(2\pi RT_{wall})^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall})^2}{2RT_{wall}}\right\} \\
&= \frac{\rho_{wall}}{(2\pi RT_0)^{3/2}} \left(1 - \frac{3}{2} \tau_{wall} + O(\phi^2) \right) \exp\left\{-\frac{\mathbf{c}^2 - 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{v}_{wall} + O(\phi^2)}{2RT_0} (1 - \tau_{wall} + O(\phi^2))\right\} \\
&= \frac{\rho_{wall}}{(2\pi RT_0)^{3/2}} \left(1 - \frac{3}{2} \tau_{wall} \right) \exp\left\{-\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0} + \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{v}_{wall}}{RT_0} + \frac{\mathbf{c}^2 \tau_{wall}}{2RT_0} + O(\phi^2)\right\} \\
&= \frac{\rho_{wall}}{(2\pi RT_0)^{3/2}} \left(1 - \frac{3}{2} \tau_{wall} \right) \exp\left(-\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0}\right) \exp\left(\frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{v}_{wall}}{RT_0} + \frac{\mathbf{c}^2 \tau_{wall}}{2RT_0} + O(\phi^2)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\rho_{wall}}{(2\pi RT_0)^{3/2}} \left(1 - \frac{3}{2}\tau_{wall}\right) \exp\left(-\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0}\right) \left\{1 + \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{v}_{wall}}{RT_0} + \frac{\mathbf{c}^2\tau_{wall}}{2RT_0} + O(\phi^2)\right\} \\
&= \frac{\rho_{wall}}{(2\pi RT_0)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0}\right) \left\{1 + \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{v}_{wall}}{RT_0} + \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0} - \frac{3}{2}\right)\tau_{wall}\right\} \\
&= \frac{\rho_0}{(2\pi RT_0)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0}\right) \left\{1 + \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{v}_{wall}}{RT_0} + \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0} - \frac{3}{2}\right)\tau_{wall}\right\} \\
&\quad \times \left\{1 + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2RT_0}}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_{wall}) - \frac{\tau_{wall}}{2}\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2\pi(RT_0)^2} \int_{(\mathbf{c}-\mathbf{v}_{wall})\cdot\mathbf{n}<0} (\mathbf{c}-\mathbf{v}_{wall})\cdot\mathbf{n} \exp\left(-\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0}\right) \phi d\mathbf{c}\right\} \\
&= f_0 \left\{1 + \sigma_W + 2\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{v}_{wall}}{2RT_0} + \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0} - \frac{3}{2}\right)\tau_{wall}\right\} \tag{C.27}
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\sigma_W = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2RT_0}}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_{wall}) - \frac{1}{2}\tau_{wall} - \frac{1}{2\pi(RT_0)^2} \int_{(\mathbf{c}-\mathbf{v}_{wall})\cdot\mathbf{n}<0} (\mathbf{c}-\mathbf{v}_{wall})\cdot\mathbf{n} \exp\left(-\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0}\right) \phi d\mathbf{c} \tag{C.28}$$

とおいた。式 (C.27) を式 (C.18) の右辺に代入すれば ϕ に対する境界条件

$$\phi(\mathbf{c}, \mathbf{r}, t) = \sigma_W + 2\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{v}_{wall}}{2RT_0} + \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0} - \frac{3}{2}\right)\tau_{wall} \quad [(\mathbf{c}-\mathbf{v}_{wall})\cdot\mathbf{n} > 0] \tag{C.29}$$

を得る。

● マックスウェル型固体壁境界条件の線形化

式 (C.16), (C.28), (C.29) より適応係数を α とすれば、 ϕ に対するマックスウェル型固体壁境界条件として

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{c}, \mathbf{r}, t) &= (1 - \alpha)\phi(\mathbf{c} - 2[(\mathbf{c}-\mathbf{v}_{wall})\cdot\mathbf{n}]\mathbf{n}, \mathbf{r}, t) \\
&\quad + \alpha \left\{ \sigma_W + 2\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{v}_{wall}}{2RT_0} + \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2RT_0} - \frac{3}{2}\right)\tau_{wall} \right\} \quad [(\mathbf{c}-\mathbf{v}_{wall})\cdot\mathbf{n} > 0] \tag{C.30}
\end{aligned}$$

を得る。ここで

$$\sigma_W = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2RT_0}}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{wall}) - \frac{1}{2}\tau_{wall} - \frac{1}{2\pi(RT_0)^2} \int_{(\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall}) \cdot \mathbf{n} < 0} (\mathbf{c} - \mathbf{v}_{wall}) \cdot \mathbf{n} \exp\left(-\frac{c^2}{2RT_0}\right) \phi d\mathbf{c} \quad (\text{C.31})$$

である。

• ϕ に対するマックスウェル型固体壁境界条件の無次元化

物理空間座標 r を基準長 l で、時間 t を基準時間 t_0 で、分子速度 c および固体壁面速度 \mathbf{v}_{wall} を静止平衡状態における分子の最確速度 $\sqrt{2RT_0}$ で無次元化する。

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}}{l}, \quad \hat{T} = \frac{t}{t_0}, \quad \zeta = \frac{c}{\sqrt{2RT_0}}, \quad \mathbf{V}_{wall} = \frac{\mathbf{v}_{wall}}{\sqrt{2RT_0}} \quad (\text{C.32})$$

式 (C.32) の無次元変数によれば ϕ に対するマックスウェル型固体壁境界条件は適応係数を α として式 (C.16), (C.29), (C.28) より以下のようになる。

$$\phi(\zeta, \mathbf{R}, \hat{T}) = (1-\alpha)\phi(\zeta - 2(\zeta \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, \mathbf{R}, \hat{T}) + \alpha \left[\sigma_W + 2\zeta \cdot \mathbf{V}_{wall} + \left(\zeta^2 - \frac{3}{2} \right) \tau_{wall} \right] \quad [(\zeta - \mathbf{V}_{wall}) \cdot \mathbf{n} > 0] \quad (\text{C.33})$$

$$\sigma_W = \sqrt{\pi}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_{wall}) - \frac{1}{2}\tau_{wall} - 2\sqrt{\pi} \int_{(\zeta - \mathbf{V}_{wall}) \cdot \mathbf{n} < 0} (\zeta - \mathbf{V}_{wall}) \cdot \mathbf{n} E \phi d\zeta \quad (\text{C.34})$$

ここで

$$E = E(\zeta) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \exp(-\zeta^2) \quad (\text{C.35})$$

である。

• 参考文献

日本流体力学会編, 流体力学ハンドブック (1987), pp.309-404, 丸善

付録 D. $D \rightarrow 0 (K_n \rightarrow \infty)$ におけるポアズイユ流の流量係数

ポアズイユ流の流量係数 $Q(D)$ は積分方程式

$$\psi(Z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^D T_{-1}(|Z - Z'|) \psi(Z') dZ' \quad (D.1)$$

の解 $\psi(Z)$ により

$$Q(D) = -\frac{1}{D} + \frac{1}{D^2} \int_0^D \psi(Z) dZ \quad (D.2)$$

と表される (本文の式 (4.72), (4.71) で添字 P を省略したもの)。

• 積分方程式 (D.1) の解を

$$\psi(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(Z) \quad (D.3)$$

の形で求める [1]。ここで

$$\psi_0(Z) = 1 \quad (D.4)$$

$$\psi_n(Z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^D T_{-1}(|Z - Z'|) \psi_{n-1}(Z') dZ' \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (D.5)$$

である。

$n = 1$ に対して

$$\psi_1(Z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^D T_{-1}(|Z - Z'|) dZ' \quad (D.6)$$

となる。

$$\frac{dT_0(Z)}{dZ} = -T_1(Z) \quad (D.7)$$

であるから (付録 E 参照)、

$$\begin{aligned} \psi_1(Z) &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^D \frac{dT_0(|Z - Z'|)}{d|Z - Z'|} dZ' \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^Z \frac{dT_0(Z - Z')}{d(Z - Z')} dZ' + \int_Z^D \frac{dT_0(Z' - Z)}{d(Z' - Z)} dZ' \right] \end{aligned}$$

[] 内の第 1 の積分を I_1 , 第 2 の積分を I_2 とおけば

$$\psi_1(Z) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} (I_1 + I_2)$$

となる。

積分 I_1 において $Z - Z' = x$, $-dZ' = dx$ と変数変換すれば

$$I_1 = \int_0^Z \frac{dT_0(Z - Z')}{d(Z - Z')} dZ' = \int_Z^0 \frac{dT_0(x)}{dx} (-dx) = [T_0(x)]_0^Z = T_0(Z) - T_0(0)$$

積分 I_2 において $Z' - Z = x, dZ' = dx$ と変数変換すれば

$$I_2 = \int_Z^D \frac{dT_0(Z' - Z)}{d(Z' - Z)} dZ' = \int_0^{D-Z} \frac{dT_0(x)}{dx} dx = [T_0(x)]_0^{D-Z} = T_0(D - Z) - T_0(0)$$

となり、

$$\begin{aligned} \psi_1(Z) &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \{T_0(Z) + T_0(D - Z) - 2T_0(0)\} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \{T_0(Z) + T_0(D - Z) - \sqrt{\pi}\} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \{T_0(Z) + T_0(D - Z)\} + 1 \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

を得る (ここで、 $T_0(0) = \sqrt{\pi}/2$ を用いた。付録 E 参照)。

式 (D.4), (D.8) により $\psi(Z)$ の $n = 1$ までの近似解 $\psi^{(1)}(Z)$ は

$$\begin{aligned} \psi^{(1)}(Z) &= \psi_0(Z) + \psi_1(Z) = 1 + \left[-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \{T_0(Z) + T_0(D - Z)\} + 1 \right] \\ &= 2 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \{T_0(Z) + T_0(D - Z)\} \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

となる。

• この $\psi^{(1)}(Z)$ を式 (D.2) に代入すれば、積分方程式 (D.1) の第 1 近似解による流量係数 $Q^{(1)}(D)$ は

$$\begin{aligned} Q^{(1)}(D) &= -\frac{1}{D} + \frac{1}{D^2} \int_0^D \left[2 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \{T_0(Z) + T_0(D - Z)\} \right] dZ \\ &= -\frac{1}{D} + \frac{2D}{D^2} - \frac{1}{D^2 \sqrt{\pi}} \int_0^D \{T_0(Z) + T_0(D - Z)\} dZ \\ &= \frac{1}{D} - \frac{2}{D^2 \sqrt{\pi}} \int_0^D T_0(Z) dZ \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

と表される。

• 今 $D \approx 0$ であるから式 (D.10) の積分は $T_0(Z)$ の $Z \approx 0$ における挙動 (付録 E, G 参照)

$$T_0(Z) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} + Z \log Z - \left(1 - \frac{3}{2}\gamma\right) Z \quad \gamma: \text{オイラーの定数} \quad (\text{D.11})$$

を積分すればよい。

すなわち

$$\begin{aligned} \int_0^D T_0(Z) dZ &\approx \int_0^D \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} + Z \log Z - \left(1 - \frac{3}{2}\gamma\right) Z \right] dZ \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} [Z]_0^D + \left[\frac{Z^2}{2} \log Z - \frac{Z^2}{4} \right]_0^D - \left(1 - \frac{3}{2}\gamma\right) \left[\frac{Z^2}{2} \right]_0^D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}D + \frac{D^2}{2}\log D - \frac{D^2}{4} - \left(1 - \frac{3}{2}\gamma\right)\frac{D^2}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}D + \frac{D^2}{2}\log D - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\gamma\right)D^2 \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}D + \frac{D^2}{2}\log D - \frac{3}{4}(1 - \gamma)D^2 \tag{D.12}
\end{aligned}$$

これを式 (D.10) に代入すれば

$$\begin{aligned}
Q^{(1)}(D) &\approx \frac{1}{D} - \frac{2}{D^2\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}D + \frac{D^2}{2}\log D - \frac{3}{4}(1 - \gamma)D^2 \right] \\
&= \frac{1}{D} - \left[\frac{1}{D} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\log D - \frac{3}{2\sqrt{\pi}}(1 - \gamma) \right] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\log D + \frac{3}{2\sqrt{\pi}}(1 - \gamma) \tag{D.13}
\end{aligned}$$

を得る。すなわち、 $D \rightarrow 0$ のとき

$$Q(D) \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\log D \tag{D.14}$$

●参考文献

[1] Cercignani, C. : Plane Poiseuille Flow and Knudsen Minimum Effect : "Rarefied Gas Dynamics" Proceedings of the third Symposium on Rarefied Gas Dynamics , ed. by Laurmann, J.A. : Academic Press Inc., New York (1963), pp.92-101.

付録 E. 積分 $T_0(x)$ の $x \approx 0$ における挙動 (1)

積分

$$T_0(x) = \int_0^{\infty} e^{-u^2 - \frac{x}{u}} du \quad (\text{E.1})$$

の $x \approx 0$ における挙動を文献 [1] に従って導く。

• 積分 $T_0(x)$ は、より一般的な積分

$$T_n(x) = \int_0^{\infty} u^n e^{-u^2 - \frac{x}{u}} du \quad (\text{E.2})$$

において $n = 0$ としたものである。式 (E.2) の両辺を x で微分すれば

$$\frac{dT_n(x)}{dx} = \int_0^{\infty} u^n e^{-u^2 - \frac{x}{u}} \left(-\frac{1}{u}\right) du = -\int_0^{\infty} u^{n-1} e^{-u^2 - \frac{x}{u}} du = -T_{n-1}(x)$$

となり

$$\frac{dT_n(x)}{dx} = -T_{n-1}(x) \quad (\text{E.3})$$

を得る。

また $T_n(x)$ の $x = 0$ における値は

$$T_n(0) = \int_0^{\infty} u^n e^{-u^2} du$$

となり、積分変数を $u^2 = t, 2udu = dt, du = dt/(2\sqrt{t})$ と変換すれば

$$T_n(0) = \int_0^{\infty} t^{\frac{n}{2}} e^{-t} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{\frac{n-1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{n+1}{2}-1} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad (\text{E.4})$$

を得る。

式 (E.3),(E.4) で $n = 0$ とすれば

$$\frac{dT_0(x)}{dx} = -T_{-1}(x) \quad (\text{E.5})$$

$$T_0(0) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{E.6})$$

• $T_0(x)$ の $x \approx 0$ における挙動

まず、 $T_0(x)$ をラプラス変換する。 $T_0(x)$ のラプラス変換 $G(p)$ は

$$G(p) = L\{T_0(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-px} T_0(x) dx$$

と定義されて

$$G(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-u^2 - \frac{x}{u}} du \right\} dx = \int_0^{\infty} e^{-u^2} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-px} e^{-\frac{x}{u}} dx \right\} du \quad (\text{E.7})$$

となる。式 (E.7) の被積分関数の $\{ \}$ 内の積分は

$$\int_0^{\infty} e^{-(p+\frac{1}{u})x} dx = -\frac{1}{p+1/u} [e^{-(p+\frac{1}{u})x}]_0^{\infty} = \frac{1}{p+1/u} = \frac{1}{p} \frac{u}{u+1/p}$$

であるから

$$G(p) = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} \frac{u}{u+1/p} e^{-u^2} du \quad (\text{E.8})$$

となる。

$$\frac{u}{u+1/p} = 1 - \frac{1/p}{u+1/p} = 1 - \frac{1}{p} \frac{1}{u+1/p}$$

であるから

$$\begin{aligned} G(p) &= \frac{1}{p} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p} \frac{1}{u+1/p}\right) e^{-u^2} du = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du - \frac{1}{p^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u+1/p} du \\ &= \frac{1}{p} \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{p^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u+1/p} du \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

付録 F によれば、右辺第 2 項の積分は

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{ue^{-u^2}}{u+1/p} du &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \psi(n+1)}{n!} \left(\frac{1}{p}\right)^{2n} + \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} \left(\frac{1}{p}\right)^{2n+1} \\ &\quad + e^{-1/p^2} \log p \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

と表される。ここで

$$\psi(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \gamma \quad (n \geq 1), \quad \psi(1) = -\gamma \quad (\text{E.11})$$

である (γ はオイラーの定数)。

式 (E.10) を式 (E.9) に代入して

$$G(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \psi(n+1)}{n!} \frac{1}{p^{2n+2}} - \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(2n+1)!!} \frac{1}{p^{2n+3}} - \frac{1}{p^2} e^{-1/p^2} \log p$$

ここで右辺第 4 項を

$$\frac{1}{p^2} e^{-1/p^2} \log p = \frac{1}{p^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! p^{2n}} \log p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! p^{2n+2}} \log p$$

と表せば

$$\begin{aligned} G(p) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \psi(n+1)}{n!} \frac{1}{p^{2n+2}} - \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(2n+1)!!} \frac{1}{p^{2n+3}} \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \log p}{n! p^{2n+2}} \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

となる。

ラプラス変換の公式 [2]

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^{k+1}} \right\} = \frac{x^k}{k!} \quad , \quad L^{-1} \left\{ \frac{\log p}{p^{k+1}} \right\} = \frac{x^k}{k!} \{ \psi(k+1) - \log x \} \quad (\text{E.13})$$

より $G(p)$ の逆変換 $T_0(x)$ は

$$\begin{aligned} T_0(x) &= L^{-1} \{ G(p) \} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \psi(n+1)}{n!} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(2n+1)!!} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \{ \psi(2n+2) - \log x \} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)!} \left\{ \frac{1}{2} \psi(n+1) + \psi(2n+2) - \log x \right\} x^{2n+1} \\ &\quad - \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(2n+1)!!(2n+2)!} x^{2n+2} \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

となる。

$x \approx 0$ で

$$\begin{aligned} T_0(x) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \left\{ \frac{1}{2} \psi(1) + \psi(2) - \log x \right\} x + O(x^2) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \left\{ \frac{1}{2}(-\gamma) + 1 - \gamma - \log x \right\} x + O(x^2) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \left(1 - \frac{3}{2} \gamma \right) x + x \log x + O(x^2) \end{aligned}$$

すなわち

$$T_0(x) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \left(1 - \frac{3}{2} \gamma \right) x + x \log x \quad (\text{E.15})$$

を得る。

●参考文献

[1] Abramowitz, M. : Evaluation of the integral $\int_0^\infty e^{-u^2-x/u} du$: Journal of Mathematics & Physics Vol.32(1953), pp.188-192.

[2] 宇野利雄、洪妊植 : ラプラス変換 : 共立全書 (1975), p.224, p.157.

付録 F. 積分 $f(x) = \int_0^\infty e^{-u^2}/(u+x)du$ の $x \approx 0$ における挙動 積分

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{u+x} du \quad (x \geq 0) \quad (\text{F.1})$$

の $x \approx 0$ における挙動を文献 [1] に従って導く。

• $f(x)$ が満たす微分方程式

恒等式

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{ue^{-u^2}}{u+x} du &= \int_0^\infty \frac{d}{du} \left(-\frac{1}{2}e^{-u^2} \right) \frac{1}{u+x} du = \frac{1}{2} \left[-\frac{e^{-u^2}}{u+x} \right]_0^\infty - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{(u+x)^2} du \\ &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{(u+x)^2} du \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

と

$$\frac{df}{dx} = - \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{(u+x)^2} du \quad (\text{F.3})$$

より

$$\int_0^\infty \frac{ue^{-u^2}}{u+x} du = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \frac{df}{dx} \quad (\text{F.4})$$

一方

$$\frac{u}{u+x} = 1 - \frac{x}{u+x}$$

であるから式 (F.4) の左辺は

$$\int_0^\infty \frac{ue^{-u^2}}{u+x} du = \int_0^\infty e^{-u^2} du - x \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{u+x} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - xf(x) \quad (\text{F.5})$$

となり、式 (F.4) は

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} - xf(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \frac{df}{dx}$$

$$\sqrt{\pi} - 2xf(x) = \frac{1}{x} + \frac{df}{dx}$$

となって、 $f(x)$ が満たすべき微分方程式

$$\frac{df}{dx} + 2xf(x) = \sqrt{\pi} - \frac{1}{x} \quad (\text{F.6})$$

を得る。

• 微分方程式の特異性の除去

微分方程式 (F.6) は $x = 0$ で特異性を持つが、これは

$$f(x) = y - e^{-x^2} \log x \quad (\text{F.7})$$

として得られる y に関する微分方程式においては除去される。

実際、

$$\frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} + 2xe^{-x^2} \log x - \frac{e^{-x^2}}{x}$$

を式 (F.6) に代入すれば

$$\frac{dy}{dx} + 2xe^{-x^2} \log x - \frac{e^{-x^2}}{x} + 2xy - 2xe^{-x^2} \log x = \sqrt{\pi} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = \sqrt{\pi} - \frac{1}{x} + \frac{e^{-x^2}}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = \sqrt{\pi} - \frac{1}{x} (1 - e^{-x^2})$$

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = \sqrt{\pi} - \frac{1}{x} \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} \right\}$$

より

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = \sqrt{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{n!} \quad (\text{F.8})$$

なる特異性のない微分方程式が得られる。

• 微分方程式の解

微分方程式 (F.8) の解を級数解の形

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (\text{F.9})$$

で求める。式 (F.8) に代入して

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sqrt{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = \sqrt{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{n!}$$

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \{(n+1) a_{n+1} + 2 a_{n-1}\} x^n = \sqrt{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{n!}$$

ここで $x = 0$ とすれば

$$a_1 = \sqrt{\pi} \quad (\text{F.10})$$

が得られ、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{(n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1}\} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{n!}$$

となる。左辺を x の偶数乗の項と奇数乗の項に分けて

$$\sum_{m=1}^{\infty} \{2ma_{2m} + 2a_{2m-2}\} x^{2m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} \{(2m+1)a_{2m+1} + 2a_{2m-1}\} x^{2m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{n!}$$

として、両辺の x の偶数乗の項と奇数乗の項それぞれの係数を比較する。

x^{2m} ($m = 1, 2, 3, \dots$) の係数を比較すれば、

$$(2m+1)a_{2m+1} + 2a_{2m-1} = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{F.11})$$

となる。これより

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= \frac{-2}{(2m+1)} a_{2m-1} = \frac{-2}{(2m+1)} \frac{-2}{(2m-1)} a_{2m-3} = \frac{-2}{(2m+1)} \frac{-2}{(2m-1)} \frac{-2}{(2m-3)} a_{2m-5} \\ &= \dots \\ &= \frac{-2}{(2m+1)} \frac{-2}{(2m-1)} \frac{-2}{(2m-3)} \dots \frac{-2}{5} \frac{-2}{3} a_1 \\ &= \frac{(-2)^m \sqrt{\pi}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2m+1)} \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

を得る。

x^{2m-1} ($m = 1, 2, 3, \dots$) の係数を比較すれば、

$$2ma_{2m} + 2a_{2m-2} - \frac{(-1)^m}{m!} = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{F.13})$$

となる。これより

$$\begin{aligned} a_{2m} &= \frac{1}{2} \frac{(-1)^m}{m \cdot m!} - \frac{1}{m} a_{2m-2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(-1)^m}{m \cdot m!} - \frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{2} \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)(m-1)!} - \frac{1}{m-1} a_{2m-4} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(-1)^m}{m \cdot m!} - \frac{1}{2} \frac{(-1)^{m-1}}{m(m-1)(m-1)!} + \frac{1}{m(m-1)} a_{2m-4} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(-1)^m}{m \cdot m!} + \frac{1}{2} \frac{(-1)^m}{m!(m-1)} + \frac{1}{m(m-1)} a_{2m-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} \right) + \frac{1}{m(m-1)} \left\{ \frac{1}{2} \frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)(m-2)!} - \frac{1}{m-2} a_{2m-6} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} \right) + \frac{1}{2} \frac{(-1)^m}{m!(m-2)} - \frac{1}{m(m-1)(m-2)} a_{2m-6} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m-2} \right) - \frac{1}{m(m-1)(m-2)} \left\{ \frac{1}{2} \frac{(-1)^{m-3}}{(m-3)(m-3)!} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{m-3} a_{2m-8} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m-2} \right) + \frac{1}{2} \frac{(-1)^m}{m!(m-3)} + \frac{a_{2m-10}}{m(m-1)(m-2)(m-3)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m-2} + \frac{1}{m-3} \right) + \frac{a_{2m-10}}{m(m-1)(m-2)(m-3)} \\
&= \dots \\
&= \frac{1}{2} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m-2} + \frac{1}{m-3} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right) + (-1)^m \frac{a_0}{m!}
\end{aligned}$$

となり、後述の $a_0 = -\gamma/2$ (γ はオイラーの定数) より

$$a_{2m} = \frac{1}{2} \frac{(-1)^m}{m!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} - \gamma \right) \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{F.14})$$

を得る。整数値に対するディガンマ関数 $\psi(n)$

$$\psi(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma \quad (n \geq 1), \quad \psi(1) = -\gamma$$

を用いれば

$$a_{2m} = \frac{1}{2} \frac{(-1)^m \psi(m+1)}{m!} \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{F.15})$$

と表される。式 (F.12), (F.15) より

$$y = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \psi(n+1)}{n!} x^{2n} + \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} x^{2n+1} \quad (\text{F.16})$$

となり、これを式 (F.7) に代入して

$$\int_0^{\infty} \frac{ue^{-u^2}}{u+x} du = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \psi(n+1)}{n!} x^{2n} + \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} x^{2n+1} - e^{-x^2} \log x \quad (\text{F.17})$$

を得る。

• a_0 の決定

微分方程式 (F.6) は $x = 0$ に特異点を持ち、 $x \approx 0$ において

$$f(x) \approx -\log x$$

となる。 $x \rightarrow 0$ のときの $f(x) + \log x$ の極限值を求める。

積分

$$I = \int_0^\infty \frac{du}{(u^2 + 1)(u + x)}$$

の被積分関数を部分分数に分けて

$$\frac{1}{(u^2 + 1)(u + x)} = \frac{1}{x^2 + 1} \left(\frac{-u + x}{u^2 + 1} + \frac{1}{u + x} \right) = \frac{1}{x^2 + 1} \left(-\frac{u}{u^2 + 1} + \frac{x}{u^2 + 1} + \frac{1}{u + x} \right)$$

として積分する。

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{du}{(u^2 + 1)(u + x)} = \frac{1}{x^2 + 1} \left(-\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{2u}{u^2 + 1} du + \int_0^\infty \frac{x}{u^2 + 1} du + \int_0^\infty \frac{1}{u + x} du \right) \\ &= \frac{1}{x^2 + 1} \left\{ -\frac{1}{2} [\log(u^2 + 1)]_0^\infty + x [\tan^{-1} u]_0^\infty + [\log(u + x)]_0^\infty \right\} \\ &= \frac{1}{x^2 + 1} \left\{ \left[\log \frac{u + x}{\sqrt{u^2 + 1}} \right]_0^\infty + x \frac{\pi}{2} \right\} = \frac{1}{x^2 + 1} \left\{ -\log x + x \frac{\pi}{2} \right\} \end{aligned}$$

すなわち

$$\int_0^\infty \frac{du}{(u^2 + 1)(u + x)} = \frac{1}{x^2 + 1} \left\{ -\log x + x \frac{\pi}{2} \right\} \quad (\text{F.18})$$

を得る。

式 (F.1) の左辺と右辺からそれぞれ式 (F.18) の右辺と左辺を引けば、

$$\begin{aligned} f(x) + \frac{1}{x^2 + 1} \left\{ \log x - x \frac{\pi}{2} \right\} &= \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{u + x} du - \int_0^\infty \frac{du}{(u^2 + 1)(u + x)} \\ &= \int_0^\infty \left(e^{-u^2} - \frac{1}{u^2 + 1} \right) \frac{du}{u + x} \end{aligned} \quad (\text{F.19})$$

となる。この式 (F.19) において $x \rightarrow 0$ とすれば

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) + \log x\} = \int_0^\infty \left(e^{-u^2} - \frac{1}{u^2 + 1} \right) \frac{du}{u} \quad (\text{F.20})$$

となる。ここで、式 (F.20) 右辺の積分変数を $u^2 = t, 2udu = dt, du = dt/(2\sqrt{t})$ と変数変換すれば

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(e^{-u^2} - \frac{1}{u^2+1} \right) \frac{du}{u} &= \int_0^\infty \left(e^{-t} - \frac{1}{t+1} \right) \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-t}}{t} - \frac{1}{t(t+1)} \right\} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\{ e^{-t} \frac{d}{dt}(\log t) - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} \right\} dt \\ &= \frac{1}{2} \left\{ [e^{-t} \log t]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} \log t dt - \left[\log \frac{t}{t+1} \right]_0^\infty \right\} = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} \log t dt = -\frac{1}{2} \gamma \end{aligned}$$

ここで最後の等式は [2] による。以上より

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) + \log x\} = -\frac{1}{2} \gamma \quad (\text{F.21})$$

が得られた。

一方、式 (F.9) より

$$a_0 = \lim_{x \rightarrow 0} y$$

であり、式 (F.7) より $x \rightarrow 0$ のとき

$$y = f(x) + e^{-x^2} \log x = f(x) + \{1 + O(x^2)\} \log x \rightarrow \{f(x) + \log x\} \rightarrow -\frac{1}{2} \gamma$$

であるから

$$a_0 = -\frac{1}{2} \gamma \quad (\text{F.21})$$

となる。

● 参考文献

[1] Goodwin, E.T. and Staton, J. : Table of $\int_0^\infty e^{-u^2}/(u+x)du$: Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics Vol.1(1948), pp.319-326.

[2] 犬井鉄郎 : 特殊関数 : 岩波書店 (1970), p.34.

付録 G. 積分 $T_0(x)$ の $x \approx 0$ における挙動 (2)

積分

$$T_0(x) = \int_0^{\infty} e^{-u^2 - \frac{x}{u}} du \quad (\text{G.1})$$

の $x \approx 0$ における挙動を文献 [1] に従って導く。

- 直接 $T_0(x)$ でなく、 $T_0(x)$ から $T_0(0) = \sqrt{\pi}/2$ を差し引いた

$$I(x) = T_0(x) - T_0(0) = T_0(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{\infty} e^{-u^2 - \frac{x}{u}} du - \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \quad (\text{G.2})$$

の $x \approx 0$ における挙動を求める。

式 (G.2) の積分区間を $[0, 1]$, $[1, \infty)$ に分けて

$$I = \int_1^{\infty} e^{-u^2 - \frac{x}{u}} du - \int_1^{\infty} e^{-u^2} du + \int_0^1 e^{-u^2 - \frac{x}{u}} du - \int_0^1 e^{-u^2} du \quad (\text{G.3})$$

と表し、

$$I_1 = \int_1^{\infty} \left(e^{-u^2 - \frac{x}{u}} - e^{-u^2} \right) du \quad (\text{G.4})$$

$$I_2 = \int_0^1 \left(e^{-u^2 - \frac{x}{u}} - e^{-u^2} \right) du \quad (\text{G.5})$$

とおけば、

$$I = I_1 + I_2 \quad (\text{G.6})$$

となる。

さらに積分 I_2 の被積分関数から $e^{-x/u}$ を引いて加えて

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \left(e^{-u^2 - \frac{x}{u}} - e^{-u^2} - e^{-x/u} + e^{-x/u} \right) du \\ &= \int_0^1 \left(e^{-u^2 - \frac{x}{u}} - e^{-u^2} - e^{-x/u} \right) du + \int_0^1 e^{-x/u} du \end{aligned}$$

と表し、

$$J_1 = \int_0^1 \left(e^{-u^2 - \frac{x}{u}} - e^{-u^2} - e^{-x/u} \right) du \quad (\text{G.7})$$

$$J_2 = \int_0^1 e^{-x/u} du \quad (\text{G.8})$$

とおけば、

$$I_2 = J_1 + J_2 \quad (\text{G.9})$$

となる。結局

$$I = I_1 + J_1 + J_2 \quad (\text{G.10})$$

となる。こうしておいて $x \approx 0$ における積分 I_1, J_1, J_2 の挙動を調べる。

• I_1 の $x \approx 0$ における挙動

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^\infty \left(e^{-u^2 - \frac{x}{u}} - e^{-u^2} \right) du = \int_1^\infty e^{-u^2} \left(e^{-\frac{x}{u}} - 1 \right) du = \int_1^\infty e^{-u^2} \left\{ -\frac{x}{u} + O(x^2) \right\} du \\ &= -x \int_1^\infty \frac{1}{u} e^{-u^2} du + O(x^2) \end{aligned}$$

ここで $u^2 = t, 2udu = tdt, du = dt/(2\sqrt{t})$ と変数変換すれば、

$$I_1 = -x \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} \frac{dt}{2\sqrt{t}} + O(x^2) = -\frac{x}{2} \int_1^\infty \frac{1}{t} e^{-t} dt + O(x^2)$$

さらに $1/t = p, -dt/t^2 = dp, dt = -dp/p^2$ と変数変換すれば、

$$I_1 = -\frac{x}{2} \int_1^0 p e^{-\frac{1}{p}} \frac{(-1)dp}{p^2} + O(x^2) = -\frac{x}{2} \int_0^1 \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}} dp + O(x^2) \quad (\text{G.11})$$

を得る。

• J_1 の $x \approx 0$ における挙動

被積分関数に 1 を加えて引いて

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^1 \left(e^{-u^2 - \frac{x}{u}} - e^{-u^2} - e^{-x/u} + 1 - 1 \right) du \\ &= \int_0^1 \left(e^{-u^2} e^{-\frac{x}{u}} - e^{-u^2} - e^{-x/u} + 1 \right) du - \int_0^1 du \\ &= \int_0^1 \left(1 - e^{-u^2} \right) \left(1 - e^{-\frac{x}{u}} \right) du - 1 \end{aligned}$$

ここで $u^2 = p, 2udu = dp, du = dp/(2\sqrt{p})$ と変数変換すれば、

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^1 \left(1 - e^{-p} \right) \left(1 - e^{-\frac{x}{\sqrt{p}}} \right) \frac{dp}{2\sqrt{p}} - 1 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - e^{-p} \right) \left\{ \frac{x}{\sqrt{p}} + O(x^2) \right\} \frac{dp}{\sqrt{p}} - 1 \\ &= \frac{x}{2} \int_0^1 \frac{1}{p} \left(1 - e^{-p} \right) dp + O(x^2) - 1 \quad (\text{G.12}) \end{aligned}$$

• $I_1 + J_1$ の $x \approx 0$ における挙動

式 (G.11), (G.12) より

$$\begin{aligned} I_1 + J_1 &= \left[-\frac{x}{2} \int_0^1 \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}} dp + O(x^2) \right] + \left[\frac{x}{2} \int_0^1 \frac{1}{p} \left(1 - e^{-p} \right) dp + O(x^2) - 1 \right] \\ &= \frac{x}{2} \int_0^1 \frac{1}{p} \left(1 - e^{-p} - e^{-\frac{1}{p}} \right) dp + O(x^2) - 1 = \frac{x}{2} \gamma - 1 + O(x^2) \quad (\text{G.13}) \end{aligned}$$

ここで γ はオイラーの定数で

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1}{p} \left(1 - e^{-p} - e^{-\frac{1}{p}} \right) dp$$

を用いた [2]。

• J_2 の $x \approx 0$ における挙動

$$J_2 = \int_0^1 e^{-x/u} du$$

において、 $x/u = t, -(x/u^2)du = dt, du = -(u^2/x)dt = -(x/t^2)dt$ と変数変換して

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{\infty}^x e^{-t} \left(-\frac{x}{t^2} \right) dt = x \int_x^{\infty} \frac{1}{t^2} e^{-t} dt = x \left\{ \left[-\frac{1}{t} e^{-t} \right]_x^{\infty} - \int_x^{\infty} \frac{1}{t} e^{-t} dt \right\} \\ &= x \left\{ \frac{1}{x} e^{-x} - \int_x^{\infty} \frac{1}{t} e^{-t} dt \right\} = e^{-x} - x \left\{ \left[\log t e^{-t} \right]_x^{\infty} + \int_x^{\infty} \log t e^{-t} dt \right\} \\ &= e^{-x} + x \log x e^{-x} - x \int_x^{\infty} \log t e^{-t} dt \end{aligned}$$

ここで

$$\int_x^{\infty} \log t e^{-t} dt = e^{-x} \log x + \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

に注意すれば [2]

$$J_2 = e^{-x} + x \log x e^{-x} - x \left[e^{-x} \log x + \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right] = e^{-x} - x \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

また $x \rightarrow 0$ のとき、 γ をオイラーの定数として

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \approx -\gamma - \log x$$

に注意すれば [3]、 $x \approx 0$ のとき

$$\begin{aligned} J_2 &\approx e^{-x} - x(-\gamma - \log x) = e^{-x} + x\gamma + x \log x \\ &\approx 1 - x + O(x^2) + \gamma x + x \log x \\ &= 1 - (1 - \gamma)x + x \log x + O(x^2) \end{aligned} \tag{G.14}$$

を得る。

• 以上、式 (G.10),(G.13),(G.14) より

$$\begin{aligned} I &= (I_1 + J_1) + J_2 \approx \left[\frac{x}{2} \gamma - 1 + O(x^2) \right] + \left[1 - (1 - \gamma)x + x \log x + O(x^2) \right] \\ &= - \left(1 - \frac{3}{2} \gamma \right) x + x \log x + O(x^2) \end{aligned} \tag{G.15}$$

を得る。

式 (G.2),(G.15) より $x \approx 0$ のとき

$$T_0(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + I \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \left(1 - \frac{3}{2}\gamma\right)x + x \log x \quad (\text{G.16})$$

となる。

● 参考文献

[1] Cercignani, C. : Rarefied Gas Dynamics : Cambridge University Press, Cambridge (2000), p.64.

[2] 森口繁一、宇田川 久、一松信 : 数学公式 III : 岩波書店 (1970), p.13.

[3] 犬井鉄郎 : 特殊関数 : 岩波書店 (1970), p.34.